ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 30, n. 1-2, 2022

Rivista di ricerca in
didattica della matematica

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Ottobre 2022

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 30, n. 1-2, 2022

Rivista di ricerca in
didattica della matematica

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Ottobre 2022

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Rivista di ricerca in didattica della matematica,
fondata nel 1987 da Bruno D'Amore,
direttore scientifico dal 1987 al 2021.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Proprietà Direzione Amministrazione Redazione:
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
https://rsddm.dm.unibo.it/la-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica
http://www.incontriconlamatematica.org/ita/rivista.php

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia.

Indice

La tensión entre opuestos como generadora de conocimiento matemático: El caso discreto-continuo en el cálculo

Tension between opposite perspectives as a generator of mathematical knowledge: The discrete-continuous case in calculus

Tensione tra prospettive opposte come generatore di conoscenza matematica: Il caso discreto-continuo nel calcolo

Carlos Rondero Guerrero, Aarón Reyes Rodríguez y Vicenç Font Moll pp. 7–26

Tra matematica e filosofia: La *Rithmomachia* di Francesco Barozzi

Between mathematics and philosophy: Francesco Barozzi's *Rithmomachia*

Entre la matemática y la filosofía: la *Rithmomachia* de Francesco Barozzi

Irene Papadaki e Athanasios Gagatsis pp. 27–31

Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio

Introducing the notion of function through Descartes' algebra of segments

Introducir la noción de función a través del álgebra de segmentos de Descartes

Nicol Imperi ed Enrico Rogora pp. 33–52

Riflessioni su certi dannosi modi di stravolgere l'apprendimento della matematica

Reflections on certain harmful ways of distorting the learning of mathematics

Reflexiones sobre ciertas formas nocivas de distorsionar el aprendizaje de la matemática

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla pp. 53–64

RECENSIONI E PREFAZIONI

Facchini, C., & Lanconelli, E. (2021). *Un cammino tra massimi e minimi: ciottoli e sorgive di calcolo infinitesimale*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla pp. 67–69

Marrone, C., & Venger A. M. (2021). *La tradizione dei Maestri costruttori. Quaderno 1. La lapide tombale di Hugues Libergier*. S. Demetrio Corone (CS): Irfan Edizioni.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla pp. 69–70

Maracchia, S. (2022). *Dante e la quadratura del cerchio*. Roma: Simmetria Edizioni.

Recensione di Bruno D'Amore pp. 70–72

Lolli, G. (2022). *Matematica in movimento. Come cambiano le dimostrazioni*. Torino: Bollati Boringhieri. *Recensione di Bruno D'Amore*	pp. 72–73
Cavalli Sforza, L. (2019). *L'evoluzione della cultura*. Torino: Codice. *Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla*	pp. 74–76
D'Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora. *Recensione di Miglena Asenova, Maura Iori e George Santi*	pp. 77–79
Iori, M. (2021). *La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora. *Prefazione di Raymond Duval*	pp. 80–83
Asenova, M. (2021). *Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. *Prefazione di Ferdinando Arzarello*	pp. 84–91

IN RICORDO DI …

Ennio Peres	pp. 95–97
Giovanni Valentini	pp. 98–99
Walter Valentini	pp. 100–104
Carlos Eduardo Vasco Uribe	pp. 105–108

La tensión entre opuestos como generadora de conocimiento matemático: El caso discreto-continuo en el cálculo

Tension between opposite perspectives as a generator of mathematical knowledge: The discrete-continuous case in calculus

Tensione tra prospettive opposte come generatore di conoscenza matematica: Il caso discreto-continuo nel calcolo

Carlos Rondero Guerrero,[1] Aarón Reyes Rodríguez[1] y Vicenç Font Moll[2]

[1] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México*

[2] *Facultat de Formació del Professorat, Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica, Universitat de Barcelona, España*

Resumen. *Durante la enseñanza del cálculo, generalmente no se discute la tensión discreto-continuo, lo cual repercute en el tipo de comprensión generada por los estudiantes respecto de las ideas centrales o fundamentales de esta rama de las matemáticas. Afirmamos que tal tensión propicia o es generadora de articulaciones entre objetos matemáticos, las cuales, a su vez, constituyen nuevo conocimiento. Se analiza la tensión discreto-continuo en tres casos, presentes en el cálculo: (i) Teorema del valor medio para derivadas, (ii) Teorema del valor medio para integrales y (iii) Teorema fundamental. Se rescata la coexistencia y complementación de ambos enfoques. Además, se resalta la presencia de la noción de promediación como un eje de articulación de estos tres resultados, tanto en lo discreto como en lo continuo. Finalmente, destacamos la relevancia para la didáctica de la matemática el reflexionar en torno a la tensión entre una diversidad de opuestos que perviven en la matemática, la cual da cuenta y es un aspecto más de la complejidad de sus objetos de estudio. Todo lo anterior constituye una herramienta la cual puede apoyar a la re-construcción orientada del conocimiento matemático, como perspectiva didáctica.*

Palabras clave: tensión discreto-continuo, didáctica, articulación, complejidad, promediación.

Abstract. *During the teaching of calculus, the discrete-continuous tension is generally not discussed, which affects the type of understanding that students generate regarding fundamental ideas in this branch of mathematics. We argue that such tension fosters or generates articulations between mathematical objects, which,* *in turn, constitute new knowledge. The discrete-continuous tension is analyzed in three cases: (i) Mean value theorem for derivatives, (ii) Mean value theorem for integrals and (iii) Fundamental theorem. The coexistence and complementation of both approaches is rescued. In addition, the presence of the notion of averaging as an articulation axis of these three results, in both discrete and continuous versions, is highlighted. Finally, we pointed up the relevance that reflection on the tension between a diversity of opposites has for the didactic of mathematics, which accounts for and is one more aspect of the complexity of the objects that are studied in mathematics. All of the above constitutes a tool that can support the oriented re-construction of mathematical knowledge, as a didactic perspective.*

Keywords: discrete-continuous tension, didactic, articulation, complexity, averaging.

Sunto. *Durante l'insegnamento dell'analisi matematica, la tensione discreto-continuo non viene generalmente discussa, il che si ripercuote sul tipo di comprensione generata dagli studenti rispetto alle idee fondamentali di questa branca della matematica. Sosteniamo che tale tensione favorisca o generi articolazioni tra gli oggetti matematici, che a loro volta costituiscono nuova conoscenza. La tensione discreto-continuo viene analizzata in tre casi: (i) teorema del valore medio delle derivate, (ii) teorema del valore medio degli integrali e (iii) teorema fondamentale. Viene evidenziata la coesistenza e la complementarità di entrambi gli approcci. Inoltre, si sottolinea la presenza della nozione di media come asse di articolazione di questi tre risultati, sia nel discreto che nel continuo. Infine, sottolineiamo l'importanza, per la didattica della matematica, di riflettere sulla tensione tra una diversità di opposti che esiste in matematica, che costituisce ed è un altro aspetto della complessità dei suoi oggetti di studio. Tutto ciò si configura come uno strumento che può supportare la ri-costruzione orientata del sapere matematico, come prospettiva didattica.*

Parole chiave: tensione discreto-continuo, didattica, articolazione, complessità, media.

1. Introducción

En este apartado se lleva a cabo una reflexión de cómo la tensión entre los opuestos discreto-continuo ha sido generadora de conocimiento en disciplinas científicas como la física; particularmente, en la electrónica. Posteriormente, identificamos una analogía de dicha tensión entre opuestos, presente en tres de los teoremas más relevantes del cálculo, y evidenciamos cómo esta es generadora de articulaciones entre objetos matemáticos, con la consecuente generación de nuevo conocimiento o la re-construcción de conocimiento ya existente, para quien lleva a cabo la reflexión.

El análisis de la tensión conceptual discreto-continuo ha tenido relevancia en el desarrollo de la electrónica, siendo este un caso paradigmático para comprender cómo tal tensión entre opuestos es generadora de articulaciones entre ideas y por ende de saberes diversos. En esta disciplina hubo un predominio de lo analógico (continuo) durante mucho tiempo; sin embargo, se da un cambio de paradigma cuando se pasa a la electrónica digital (discreto), lo cual propició un enorme avance en el desarrollo tecnológico. Es decir, se pasó de lo analógico a lo digital, entre otros aspectos, con el objetivo de eficientar el uso de las señales electromagnéticas. Esto es, la discretización (digitalización) de señales, permite incluir una enorme cantidad de información en el espacio electromagnético. Como ejemplo del desarrollo tecnológico que se fue estructurando, en un tiempo relativamente breve, se diseñaron y se emplearon en diversas aplicaciones, los convertidores analógico-digital y digital-analógico, para pasar de una representación a otra.

Estos avances en la electrónica no se hubieran podido lograr sin la modelación matemática de las señales electromagnéticas a través de funciones de variables tanto discretas como continuas. En consecuencia, es importante discutir breve y sintéticamente sobre la presencia de la tensión discreto-continuo en el ámbito escolar.

En las diferentes asignaturas de electrónica, impartidas durante la formación profesional escolarizada, se presenta una problemática cuando los estudiantes las cursan ya que, en general, solo han tratado con funciones continuas en los cursos previos de cálculo y de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, desde un inicio en tales asignaturas se requiere abordar fenómenos físicos desde ambas perspectivas. La dominancia de las herramientas matemáticas en lo continuo propicia una carencia de articulación conceptual y cognitiva entre ambos dominios, discreto-continuo, produciéndose entendimientos superficiales ante la falta de articulaciones.

Cuando se lleva a cabo un proceso de cuestionamiento sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y sus diversas interrelaciones, se genera una red de significados, que se traduce en nuevo conocimiento disciplinar, o en una re-construcción de saberes ya existentes. Esta red, a su vez, se constituye en una herramienta didáctica, en un mapa con nuevas rutas sugeridas para llevar a cabo una re-construcción orientada del conocimiento en los salones de clase.

Resulta relevante considerar la prevalencia del contexto continuo en el cálculo para la construcción de los desarrollos teóricos, mientras que el contexto discreto está enfocado en las aplicaciones del análisis numérico, sustentado fuertemente en lo recursivo y en lo iterativo. Por otra parte, frecuentemente en matemáticas se requieren crear diversos modelos, discretos y continuos, los cuales buscan describir la realidad desde ambas perspectivas, complementando el entendimiento de los fenómenos. Hay pues necesidad de atender la problemática mencionada, acerca de la conveniente y necesaria articulación entre los opuestos discreto-continuo en el cálculo, a partir de la reflexión sobre la tensión entre ellos.

Las consideraciones anteriores, son una muestra acerca de la complejidad de los objetos matemáticos, de forma que las reflexiones sobre esta, y la articulación de sus componentes son frecuentes en diversos enfoques teóricos utilizados en la Educación Matemática (Rondero & Font, 2015). La doble mirada complejidad-articulación aplicada a la tensión discreto-continuo, permite profundizar en las diversas génesis del conocimiento y algunas de sus implicaciones didácticas, particularmente algunas posibles rutas de acción implementadas en los salones de clase. De acuerdo con Torres (2009) y García (2013) consideramos que la articulación entre contrarios se puede pensar como un diccionario, permitiendo *traducir* nociones y resultados, de un contexto a otro, con la finalidad de obtener nuevas nociones y resultados a partir de los ya conocidos.

2. Antecedentes históricos de la tensión discreto-continuo en el cálculo

La palabra o término tensión está referida siempre a dos contrarios u opuestos, ligados entre sí, entre los cuales no necesariamente se da una síntesis o conciliación. Si nos ubicamos en el contexto de la matemática, la tensión puede entenderse como esfuerzo orientado a conseguir un resultado, de forma que los contrarios perviven. En nuestro caso, los aspectos discretos y continuos presentes en la matemática, considerados como opuestos, tienen una tensión inherente propiciatoria de una construcción de conocimiento, cuando hay un predominio de uno sobre el otro o bien una transición entre ellos. Es importante resaltar cómo los significados asociados a cada perspectiva (discreto-continuo) proporcionan información diferenciada que complementa y fortalece los significados de la otra. Tal complementación se manifiesta como una construcción de conocimiento, mediante un proceso de articulación de objetos matemáticos.

A continuación se hará una breve revisión histórica referida a algunos de los principales momentos donde se identificó la presencia de la tensión discreto-continuo. Los momentos abordados en el análisis son aquellos de los cuales se tiene la seguridad de la presencia de tal tensión, aunque tal temática es muy amplia y se pueden llevar a cabo desarrollos más detallados, con respecto al aquí realizado, enfocado en la génesis del cálculo.

Un análisis histórico-epistemológico consiste en un “análisis epistémico, principalmente internalista, de un determinado campo conceptual en la historia de la ciencia” (Adúriz, 2010, p. 129), cuya finalidad es entender la naturaleza, significado y sentido de una idea o concepto, “al determinar las causas que posibilitaron su aparición, de identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus transformaciones sucesivas hasta llegar en el aula como objeto de enseñanza” (Martínez & Poirier, 2008, p. 202). Precisamente, el identificar las diferentes expresiones de la tensión discreto-continuo, permite reconocer sus contribuciones en la evolución de las ideas del cálculo.

Bergé y Sessa (2003) plantean la recuperación de la complejidad del objeto estudiado mediante un análisis epistemológico para permitir al investigador ampliar las fronteras de sus concepciones epistemológicas; aportando insumos significativos para la problematización de una propuesta didáctica. De la misma manera, Farfán (1997) afirma que el análisis epistemológico permite al didacta tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza. Dicho análisis provee de historicidad a los conceptos matemáticos presentados en la instrucción como objetos universales, así como a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas. Además, posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado. Esto contribuye a desterrar ficciones de la escuela; por ejemplo, que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de la ciencia.

Adentrándonos en una breve perspectiva histórica, para los griegos una cantidad discreta o número podía dividirse sólo un número finito de veces, hasta obtener la unidad, mientras que una cantidad continua o magnitud podía dividirse indefinidamente sin perder su esencia. En esta cultura, "la unidad, o uno, no era un número; era el inicio del número y era usado para medir la multiplicidad. Los números fueron meras colecciones de unidades discretas las cuales median una multiplicidad" (Neal, 2002, p. 1). Con Pitágoras (564 – 475 a. C.) existe un predominio de lo discreto, principalmente en lo referido a propiedades de los números figurativos.

Para Aristóteles (384 – 322 a. C.), los números y las magnitudes constituían clases ajenas e independientes, siendo la aritmética la encargada del estudio de los primeros y la geometría del estudio de las segundas (Aristóteles, IV a. C./1994, 75b; Franklin, 2014; Klein, 1992; Waldegg, 1996).

Este filósofo consideraba a la unidad como una sustancia sin posición, como inicio del número, utilizada para medir una multitud, pero en sí, no era un número (Neal, 2002): "el número mínimo, en sentido absoluto, es el dos" (Aristóteles, IV a. C./1995, 220ª, 25); por el contrario, una magnitud "es divisible en partes siempre divisibles" (Aristóteles, IV a. C./1995, 231b, 15). Se puede conjeturar que la falta de consideración de la tensión discreto-continuo en Aristóteles fue un factor limitante para la realización de contribuciones más amplias a la matemática.

Por su parte, Euclides (325 – 265 a. C.) utilizó la misma definición aristotélica de número y unidad; así como la distinción entre número y magnitud, lo cual se refleja en la separación entre los resultados geométricos (Libros I-VI) y los aritméticos (Libros VII-IX) en los *Elementos* (Neal, 2002). En el libro VII de los Elementos, Euclides define la unidad como "aquello por virtud de lo cual cada una de las cosas es llamado uno" (Euclid, 1908, p. 277), mientras considera a un número como "una multitud compuesta de unidades" (ibid.). En la obra de Euclides se percibe un predominio de lo continuo, manifestado en el desarrollo de las ideas geométricas, de modo que este libro ha sido considerado el texto por excelencia de geometría, incluso hasta la época moderna.

Ahora bien, el gran pensador griego, Arquímedes (287 – 212 a. C.), a quien diversos autores lo señalan como iniciador del cálculo, emplea métodos discretos para calcular, por ejemplo, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos, particularmente usando el método de exhaución, llega al resultado "la razón que existe entre el círculo y el cuadrado que tiene por lado el radio del círculo, es la misma que se obtiene entre la longitud de la circunferencia del círculo y su diámetro" (Pla, 2009, p. 184). En los trabajos de Arquímedes se puede apreciar una articulación entre aspectos discretos y continuos, ya que para calcular magnitudes usa métodos basados en lo discreto y en consideraciones relativas al equilibrio (excesos y defectos), aunado a su forma de calcular una magnitud, acotándola mediante excesos y defectos, los cuales se van aproximando al valor de la magnitud. Este método arquimediano de los excesos y defectos, propició la obtención de resultados muy relevantes, por parte de Arquímedes, como el cálculo aproximado de π, entre otros.

Aunque históricamente es un salto muy grande, durante la edad media hubo pocos avances en la ciencia en general. Ya iniciado el renacimiento en el siglo XVI, una de las aportaciones más trascendentes a la ciencia, la constituye la Geometría Analítica, debida a Descartes (1596 – 1650), la cual está sustentada filosóficamente en el *Discurso del Método* (Descartes, 1637/2006). Con Descartes, poco a poco la visión dicotómica entre discreto-continuo, se fue sustituyendo por una *visión integradora* en la que los números o las letras podían representar tanto a una cantidad discreta como la longitud de un segmento (continua).

Descartes primero se sitúa en el contexto del álgebra geométrica de los griegos (para explicarnos cómo se pueden hacer las operaciones aritméticas utilizando regla y compás), para romper inmediatamente con esta tradición al considerar que cualquier expresión algebraica (por ejemplo, a^2 y b^3) son segmentos (para los griegos antiguos a^2 y b^3 eran un área y un volumen).

Interesa identificar la presencia de la tensión discreto-continuo en el cálculo, para lo cual se muestran algunas aportaciones de los llamados pre-calculistas. Los procedimientos empleados, entre otros por Cavalieri (1598 – 1647) y Wallis (1626 – 1703), son esencialmente de carácter discreto, para encontrar un área bajo la curva que se puede considerar como una variable continua. Todo lo cual es una muestra de la tensión entre ambas perspectivas, la discreta y la continua. Por su parte, Wallis en su obra *Arithmetica infinitorum* (Proposition 39), publicada en 1655, encuentra el mismo resultado previo dado por Cavalieri, desde su aproximación de los indivisibles, el cual expresamos en notación moderna, como lo hace Edwards (1979):

$$\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

Wallis considera:

$$\int_0^1 x^k \; dx = \frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k} \tag{2}$$

y analiza algunos casos particulares para valores pequeños de k. Una vez fijado el valor de k, calcula el cociente para diversos valores de n e identifica en cada caso el patrón, para concluir con la igualdad expresada en la ecuación (1).

Para fines prácticos se usa en el párrafo previo la notación de límite, aunque Wallis y otros, sólo consideraban valores muy grandes de n, para así encontrar el valor "exacto" del área bajo la curva. De manera tal que para calcular el área bajo la curva (cantidad continua) Wallis ocupa métodos aritméticos fundamentados en lo discreto. En cierta forma se resuelve la tensión cuando para cada valor de k, dado, se encuentra el patrón correspondiente y al tomar valores muy grandes aumentando de n, se obtiene el valor exacto del área bajo la curva x^k.

Por otra parte, otra perspectiva discreta es la de las llamadas *Sumas de Bernoulli*, cuyos desarrollos se deben a Johann Bernoulli (1667 – 1748) las cuales muestran algunas características relevantes de las sumas de potencias de números enteros positivos, de manera que, en el caso discreto, se identifica claramente un patrón, donde al realizar la suma de las potencias de grado n, la misma aumenta en una unidad:

$$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \tag{3}$$

$$\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \tag{4}$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \tag{5}$$

$$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{30}n \tag{6}$$

Un aspecto relevante de las sumas de Bernoulli es que la suma de los coeficientes es igual a uno, en cada caso. Bernoulli usa el símbolo de integral para denotar la suma de potencias, por ejemplo la suma de cubos de números naturales se representa mediante la ecuación (5).

A partir del resultado previo, si se quiere calcular la integral de 0 a 1 de x^3, se hace una equipartición de n subintervalos, de tamaño $1/n$. Se calculan los valores de la función en el extremo de cada subintervalo y cuando se realiza la suma de todos esos valores, se obtiene la suma de los cubos de los primeros n naturales divididos entre n^3. Si el numerador se divide entre n, se tiene un promedio de alturas y para no alterar la igualdad, en el denominador se obtiene n^4. Entonces la suma de Bernoulli se divide entre n^4 y al hacer esto, para valores muy grandes de n, se encuentra el mismo resultado, para k=3, obtenido por Cavalieri y Wallis, entre otros:

$$\int_0^1 x^3 \ dx = \frac{1}{4} \tag{7}$$

En este caso se puede ver la articulación existente entre lo discreto y lo continuo, pues la integral de una función es un objeto matemático basado en objetos continuos, por contraste el resultado de ésa integral está expresado en términos de valores discretos. En general las integrales de polinomios coinciden con este mismo resultado, lo cual es una muestra de cómo la complejidad existente en la tensión discreto-continuo, se "resuelve" a través de explicitar la articulación que se va dando entre ambas perspectivas.

En algunos momentos históricos la tensión discreto-continuo ha sido más fructífera para la generación de conocimiento. En la génesis del cálculo, Newton (1643 – 1727) consideraba una curva como descrita por un punto en movimiento continuo, mientras Leibniz (1646 – 1716), conceptualizaba una curva formada por una sucesión (discreta) de segmentos infinitesimales de rectas infinitamente pequeños, para Newton, resultaba de interés describir el movimiento de los cuerpos. Concebir una curva como algo continuo le sirvió para justificar el significado de la derivada como velocidad instantánea en el momento en que la partícula llega a su posición final (no antes ni después).

La perspectiva discreta de Leibniz le permitió concebir primero su referente epistemológico discreto, representado simbólicamente mediante la ecuación (8) y posteriormente, el triángulo característico, el cual se puede considerar como una base conceptual de gran parte del cálculo (infinitesimal) leibniziano.

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = a_n - a_0 \tag{8}$$

Con la finalidad de ilustrar otro caso de la tensión discreto-continuo, considere que así como los números (mirada discreta) se pueden conceptualizar como longitudes de segmentos (mirada continua); a su vez, los segmentos se pueden considerar de manera discreta. Por ejemplo, Leibniz, encuentra un desarrollo en serie infinita del número π/4, la cual está representada por recíprocos de impares con signos alternantes:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4} \tag{9}$$

Es decir, se genera, una serie infinita de números racionales convergente al irracional π/4, lo que permite identificar el tránsito de una visión continua a una de tipo discreto, donde el todo (el segmento de longitud π/4). Esto es, la octava parte del perímetro de una circunferencia se puede considerar como una “suma infinita” de partes discretas.

El desarrollo del cálculo infinitesimal permitió a Leibniz articular lo discreto y lo continuo, ya que él “trató de conciliar entre la individualidad y el continuo, estableciendo una armonía entre las sustancias individuales y el universo infinito” (Luna, 2016, p. 13). El nuevo algoritmo infinitesimal no fue factible sin el convencimiento respecto de la operación del universo como una serie de combinaciones dialécticas desprendidas del “Uno trascendente”, de lo cual se deriva la tesis central del cálculo: las diferencias y las integraciones son opuestas, pero también complementarias. Así Leibniz logra identificar, por medio de un análisis meramente formal, la conexión entre lo continuo y lo discreto, para de ese modo establecer un vínculo entre ellos. La realidad debe ser, entonces, continua y discreta a la vez.

La perspectiva teórica de Leibniz de considerar a lo discreto y lo continuo como elementos vinculantes, pues su división es sólo una apariencia, reflejada en gran parte de sus contribuciones al cálculo diferencial e infinitesimal. En forma tal que la tensión subyacente a lo discreto-continuo en el cálculo de la recta tangente a una curva y el área bajo la misma, queda resuelta, mediante la construcción de conocimiento correspondiente.

Por último, en el caso de Cauchy (1789 – 1857), la definición de la derivada como el límite de un cociente, ya sea de cantidades evanescentes o de diferencias infinitesimales, propició una cierta resolución de la tensión discreto-continuo y da pauta para el desarrollo del análisis matemático.

Los diversos métodos y modelos matemáticos mencionados tienen la finalidad de articular lo discreto y lo continuo, a la par de lograr una reducción de la complejidad, por ejemplo, el cálculo de áreas mediante integrales se realiza a través de operaciones aritméticas que involucran números enteros, como es el caso de la suma de potencias de enteros.

3. Contexto de reflexión, tres versiones discreta-continua de teoremas del Cálculo

En esta sección, se presentan argumentos para evidenciar la relevancia de la articulación entre lo discreto y lo continuo, para lo cual se analizan versiones desde ambos enfoques de tres de los teoremas más importantes en cálculo, los cuales son, por supuesto, una muestra de la complejidad del Cálculo, cuya comprensión requiere explicitar la necesaria articulación de sus objetos de estudio: (i) del valor medio para derivadas, (ii) del valor medio para integrales y (iii) el teorema fundamental. En los tres casos se analiza la mencionada complejidad entre lo discreto y lo continuo, desde una perspectiva histórico-epistemológica.

En el análisis de cada caso se describe la versión continua del teorema, misma que aparece en los libros de cálculo, y posteriormente se analiza la correspondiente versión de fundamentación discreta, identificada a partir de la evocación al cálculo leibniziano. En cada teorema, la estructura matemática tiene una analogía evidente y la promediación juega un papel relevante para la demostración de las versiones discretas de los tres teoremas. Precisamente, la promediación permite identificar la presencia y potencia constructora del promedio en estos teoremas del cálculo.

3.1. El teorema fundamental del cálculo

Una de las formas del teorema fundamental del cálculo para una función continua f, en el intervalo $[a, b]$, donde F es una primitiva de f, es decir, $F'(x) = f(x)$, se expresa como:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \tag{10}$$

o bien:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\ dx \tag{11}$$

Una versión diferente del mismo teorema, en la que interviene la diferencial de la función primitiva, puede expresarse como:

$$\int_a^b dF = F(b) - F(a) \tag{12}$$

o de forma equivalente:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b dF \tag{13}$$

Cuya interpretación es: el valor acumulado $F(b)$, es igual al valor inicial $F(a)$, más la acumulación o integral (suma) de su diferencial (diferencias). Analizando estas dos últimas expresiones, la primera indica que la acumulación de variaciones locales es igual a la variación total o global, y la segunda a la equivalencia entre el valor acumulado final, y la suma del valor acumulado inicial, más la acumulación correspondiente. El mismo teorema, en donde ahora aparece la diferencial de la función original, toma la forma:

$$\int_a^b df = \int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) \tag{14}$$

luego:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b df \tag{15}$$

Ahora bien, por contraste, en el trabajo de Leibniz (Edwards, 1979; Grattan-Guinness, 1980), se puede identificar la versión discreta del teorema fundamental del cálculo. Dada una sucesión finita de números, se pueden calcular, las primeras diferencias de la sucesión de números, es decir, la diferencia de un término con el que le precede. Dada la sucesión original, se obtiene otra sucesión de diferencias cada una de las cuales representa una variación discreta.

Sea a_0, a_1, a_2, …, a_n una sucesión finita de números, se puede construir una sucesión de las primeras diferencias dada por:

$$d_k = a_k - a_{k-1} \tag{16}$$

Surge entonces uno de los resultados de Leibniz más importantes en la construcción del Cálculo, el cual es posible denominar como el *teorema fundamental del cálculo discreto* (Rondero, 2001): La suma de la sucesión de diferencias, está dada como la diferencia entre el valor final y el valor inicial de la sucesión original, es decir:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = a_n - a_0 \tag{17}$$

A la propiedad anterior le denominamos *Relación Fundamental del Cálculo Leibniziano* (Rondero, Reyes, & Acosta, 2015), el cual es un referente epistemológico de Leibniz, que junto con el triángulo característico, son la base de todo el cálculo leibniziano. En esta relación aparecen dos tipos de variaciones: (i) la local, donde se comparan dos estados contiguos, representada por la ecuación (1) y (ii) la global, dada por el lado derecho de (17). En otras palabras, la acumulación de las variaciones parciales es igual a la variación total, el cual se tiene identificado como un referente epistemológico (Rondero et al., 2015). Una variante de este resultado permite establecer que el último valor de una sucesión, es igual al valor inicial más la suma o acumulación de las diferencias:

$$a_n = a_0 + \sum_{k=o}^{n} d_k \tag{18}$$

Así, las dos versiones, discreta y continua, del teorema fundamental, se expresan respectivamente de la forma (17) y (14), o de forma equivalente como indican (18) y (15).

Estas expresiones facilitan el poder transitar indistintamente entre lo discreto y lo continuo al poder relacionar la estructura de ambos teoremas. Considerando ahora la función primitiva *F* (*x*), el resultado se expresa por (17) y (12).

También es posible identificar formas análogas, las cuales indican que para calcular el estado final se requiere adicionar al estado inicial la acumulación de la variación, discreta o continua, según sea el caso. Una interpretación adicional se refiere a la predicción; es decir, para predecir un estado final se requiere adicionar la acumulación de la variación a partir del estado inicial. Es importante destacar que, en este caso, una simple variación de un resultado, cambiar $f(x)$ por $F(x)$, aporta un análisis relevante; el mismo puede favorecer una ganancia cognitiva y didáctica, para los estudiantes, teniendo en cuenta la presencia de ambas perspectivas, incluidas sus articulaciones y complementaciones. Por otra parte, los modelos aplicados en diferentes áreas, tienen por sustento la predicción de un estado final a partir de uno inicial más su variación correspondiente, como son los casos del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento uniformemente acelerado, entre otros.

Hoy en día, las nuevas tecnologías facilitan el tránsito entre lo continuo y lo discreto en el caso del TFC, tal como se puede observar, por ejemplo, en la propuesta de secuencia didáctica de Robles, Tellechea y Font (2014). Estos autores presentan el diseño de una secuencia didáctica de tareas orientada a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo, en los primeros cursos universitarios, asumiendo la complejidad y la articulación de nociones y objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), para promover el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial desempeñado por los ambientes interactivos en el estudio del Cálculo, que favorecen el acercamiento intuitivo y la conjetura.

En particular, en esta propuesta las representaciones dinámicas promueven la mejor articulación del lenguaje numérico (lo discreto) con el gráfico y con el analítico (lo continuo), así como la realización de traducciones entre ellos de manera fluida. Ahora bien, no hemos encontrado propuestas didácticas en donde dicho tránsito se plantee de forma simbólica como se ha explicado anteriormente, más allá de una introducción al cálculo de áreas bajo una curva mediante una aproximación por exceso y defecto a partir de lo discreto, al realizar una equipartición del intervalo en n partes y calcular el área de los rectángulos. Como consecuencia, el tránsito entre lo discreto y lo continuo queda en un segundo plano y no se explicita su relevancia para la comprensión de las nociones fundamentales del cálculo.

3.2. El teorema del valor medio para derivadas

La versión continua del teorema del valor medio para derivadas es la siguiente (Spivak, 2010, p. 264):

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{19}$$

Siendo f una función continua en el intervalo (a, b). Obsérvese que $b - a$, es la medida del tamaño del intervalo donde está definida la función f. Podemos identificar en el lado derecho de la expresión (1), un promedio de las diferencias, equivalente a un promedio de la derivada de la función f, representado por $f'(c)$, siendo c un punto al interior del intervalo (a, b).

Por otra parte, el promedio de los valores de una sucesión finita de primeras diferencias, resulta ser igual a la variación total entre los valores último y primero de la sucesión original, con $n+1$ términos, entre n; que es el número de diferencias existentes. Justamente, este cociente se puede identificar como una razón de cambio promedio, igual al promedio de las diferencias:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{a_n - a_0}{n} \qquad (20)$$

Donde ahora se cumple la equivalencia $a_n = a_0 + n\bar{d}$, es decir, el valor de a_n, se calcula adicionando al valor inicial, a_0, n veces el valor del promedio de las diferencias, $n\bar{d}$. Esta expresión es relevante porque $\bar{d}$, se puede considerar como un representante de las diferencias parciales y $n\bar{d}$, es el cambio total entre el estado inicial y el estado final. Dicha expresión es en cierto modo más potente que la expresión (17), pues en la anterior, para realizar el cálculo únicamente se requiere el valor del representante y el "tamaño" del conjunto discreto considerado. Lo anterior pone de manifiesto la presencia del promedio, en este caso referido a la media aritmética de las diferencias (Rondero, 2010).

El teorema del valor medio para derivadas, posibilita relacionar lo instantáneo con el promedio, visión sin la cual no sería posible estudiar muchos fenómenos de la variación y del cambio, en la física y en otras ciencias. Es importante notar, como lo señala Stewart (2008, p. 284), que "El principal significado del teorema del valor medio permite obtener información relacionada con una función a partir de la información proporcionada por su derivada". En este punto es conveniente resaltar que el teorema del valor medio es también llamado teorema del valor promedio. Por otra parte, el área bajo la curva resulta ser equivalente al área del rectángulo de base $b - a$, y de altura igual al valor promedio de la función f.

En el tratamiento analítico del promedio, no se aclara que este se refiere a una estructura heredada de la media aritmética, la aclaración es pertinente pues existen otros tipos de promedios. No se enfatiza que se trata de un promedio continuo en el sentido de involucrar a una función continua, ni se profundiza en las implicaciones conceptuales que conlleva disponer de una forma de calcular tal promedio, es decir, sobre la importancia de enfocar la atención en el cálculo de una altura promedio, en lugar del área bajo la curva. Por último, este análisis de la complejidad inherente a este teorema, en sus dos versiones análogas, pone el énfasis en la tensión entre lo discreto y lo continuo, para lo cual la promediación es el elemento central y articulador entre la razón de cambio instantánea (derivada) con una razón de cambio promedio.

3.3. El teorema del valor medio para integrales

Si el mismo tipo de promedio del teorema del valor medio para derivadas se realiza sobre la función primitiva F, considerada continua en el intervalo $[a, b]$ se obtiene esta otra representación del mismo teorema (21) la cual a su vez, posibilita transitar al teorema del valor medio para integrales.

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \tag{21}$$

Cuando se toma en consideración que $F'(x) = f(x)$, en un punto c del intervalo (a, b), como se expresa en (22):

$$f(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} \tag{22}$$

Así, considerando (22) y (10), se tiene entonces:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \tag{23}$$

Partiendo ahora de la siguiente forma del mismo teorema del valor medio para integrales (24),

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(c) \tag{24}$$

es posible pasar de esta forma a otra que puede ser reconocida como el promedio de la función f. Partiendo de la expresión (23), al tomar en consideración lo expresado en (25):

$$\int_a^b dx = b - a \tag{25}$$

aparece ahora más claramente la forma de promedio de una función continua f en el intervalo $[a, b]$, en la ecuación (26):

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{\int_a^b dx} \tag{26}$$

Es posible mostrar que el promedio de la función, en el intervalo considerado, se puede expresar como el cociente de dos totales, en este caso, el área total bajo la curva, entre el total referido al tamaño del intervalo. En tal caso, dicho cociente representa un promedio de los valores de la función dentro del intervalo, el cual se interpreta como el promedio de todas las alturas representado por f (c). Por otra parte, en la versión discreta, se tiene el promedio de diferencias entendido como el resultado obtenido al efectuar el cociente de dos totales, representados uno por la suma de diferencias de los valores y el otro identificado como el total de los valores que intervienen, esto es:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{\sum_{k=1}^{n} 1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k \tag{27}$$

Si regresamos a la expresión para la media de diferencias:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{n} d_k}{n} = \frac{a_n - a_0}{n} \tag{28}$$

su correspondiente expresión continua, bajo la consideración de que la derivada f' de la función f, es también continua en el intervalo de integración:

$$f'(c) = \frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{\int_a^b dx} \tag{29}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{30}$$

Cuando comparamos los numeradores, se llega al teorema fundamental del cálculo, en cualquiera de sus dos formas conocidas (10) y (14). Por otra parte, cuando analizamos el caso de las llamadas desviaciones de los valores x_k respecto a la media $\bar{x}$, se tiene:

$$D_k = x_k - \bar{x} \tag{31}$$

Es bien conocida la propiedad, referida a que la suma total de tales desviaciones es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{n} D_k = 0 \tag{32}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}) = 0 \tag{33}$$

Desarrollando y trasponiendo términos en (33) se obtiene (34):

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{x} = n\bar{x} \tag{34}$$

Para finalmente obtener la expresión usual para el cálculo de la media aritmética (35):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \tag{35}$$

Este resultado, el cual relaciona las desviaciones respecto al promedio, se puede interpretar a su vez en el caso continuo si se parte de la versión teorema del valor medio para integrales, a partir de (23) y (26) se obtiene:

$$f(c)\int_a^b dx = \int_a^b f(x)dx \tag{36}$$

Siguiendo el desarrollo para llegar a una expresión equivalente a las desviaciones, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(c)\ dx \tag{37}$$

$$\int_a^b [f(x) - f(c)]\ dx = 0 \tag{38}$$

Si se define entonces una función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, se obtiene el análogo al caso discreto:

$$\int_a^b g(x)\ dx = 0 \tag{39}$$

El resultado anterior indica, bajo condiciones apropiadas de continuidad, que siempre es posible encontrar una función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, referida al promedio, por tanto su integral en el intervalo de definición es cero. Es decir, en la definición de esta función de desviación, intervienen tanto la función original f, como su valor de referencia $f(c)$, o la altura promedio de la función. Por supuesto, existe una interpretación geométrica muy interesante de este resultado cuando se considera la referencia del valor promedio $f(c)$, representado gráficamente como una recta paralela al eje-x. El área generada por la curva $y = f(x)$, la cual queda por encima de $f(c)$, es igual al área por debajo. Es decir, el área de la función constante de valor $f(c)$ y el área de la gráfica de f son iguales.

La función de desviación $g(x) = f(x) - f(c)$, se puede también entender como una nueva función trasladada verticalmente, por tanto la integral sobre el intervalo de definición siempre es cero. Esto es, al definir a esa función de desviación, vía su traslación al valor de referencia (altura promedio), posibilita la acción de ajustar la anulación del área. Precisamente, la ejecución de esta acción, da otro significado a la integral: *Dada una función continua, siempre existe un valor de ésta, considerado como un valor de referencia, el cual es su "promedio", de tal forma que el área de la función por encima de su promedio, es igual al área por debajo del mismo.*

Una versión equivalente del teorema, dentro del ámbito de lo continuo es: *La integral definida, en el intervalo de definición, de la función de desviación* $g(x) = f(x) - f(c)$*, es cero.* Es importante notar la presencia del método de cálculo usado por Arquímedes, llamado exceso-defecto, constituye otro caso de tensión en la matemática, donde subyace la idea germinal de "*Æquilibrium*" (Rondero, 2001). Cuando se calcula el área respecto a un valor de referencia, representado por el promedio de la función, y se obtiene como resultado cero se pretende comunicar que el área por *exceso* (por arriba), es igual al área por *defecto* (por debajo) del valor de referencia (el promedio).

4. Conclusiones

Ha sido posible evidenciar cómo la tensión discreto-continuo, tiene una presencia preponderante en la electrónica en forma tal que ha sido un factor esencial en la transición tecnológica entre lo analógico y lo digital, por medio de la matematización y modelización de las señales respectivas. Realizamos un breve análisis histórico para mostrar la presencia de la tensión discreto-continuo en diferentes momentos y autores, así como la relevancia de ambas perspectivas en la construcción de conocimiento matemático. Es importante resaltar el predominio de una las visiones, y el sesgo correspondiente es el factor que impulsa un avance en el saber para re-equilibrar la tensión entre opuestos.

Realizar un rescate epistemológico de saberes matemáticos permite visibilizar la relevancia para la didáctica de la matemática, de la reflexión en torno a la tensión discreto-continuo. Es decir, sin su tratamiento adecuado algunos aspectos conceptuales quedan ocultos o sin una apropiada articulación. En el caso de los teoremas del cálculo aquí analizados, se presentan sus versiones análogas en lo discreto, lo que sin duda conlleva una ganancia cognitiva y didáctica de los saberes del cálculo, particularmente en lo referente a la identificación de articulaciones, base para una re-construcción orientada del conocimiento.

Al trabajar en lo discreto, la acción de promediar conlleva la suma de los datos, en el caso del cálculo leibniziano, se hizo referencia a la suma de desviaciones que se dividen entre el número total de las mismas, representado por *n*. En cambio, en el caso continuo, la acción de promediar se ejecuta al tener en lugar de la suma, la integral definida y dividir después entre el tamaño del intervalo representado por *b*-*a*, el análogo del valor *n* en lo discreto.

Los correspondientes teoremas en lo discreto conllevan algunos significados inherentes a aspectos tales como: (i) la desviación como una variación con respecto a un valor de referencia, que es precisamente el promedio, (ii) el promedio calculado como el valor del cociente entre dos tipos de totales o razón de cambio, y (iii) la suma de desviaciones vista como una suma nula de variaciones discretas. Y por su parte la versión usual, continua, de los teoremas involucra la participación de otras formas promediales asociados a *razones de cambio promedio*, en el caso de la derivada de una función definida en el intervalo [a, b], o bien a un *valor promedial de la función*, asociado a la integral definida de la misma en el intervalo [a, b].

La tensión existente entre lo discreto y lo continuo tiene un eje de articulación conceptual dado por la noción de promediación y es posible mostrar su potencial en la construcción del conocimiento matemático. En la didáctica del cálculo, para el caso de una función continua, usualmente no se hace referencia explícita a la relación existente entre el teorema fundamental del cálculo y los dos teoremas del valor medio para derivadas e integrales, lo cual representa una desarticulación conceptual que hay necesidad de revertir con análisis como el aquí propuesto. Actualmente algunos autores de libros de cálculo han resaltado esta relación entre lo discreto y lo continuo.

La didáctica del cálculo necesita de la incorporación de nuevos elementos discursivos y argumentativos, acerca de la complejidad de los objetos matemáticos y las nociones que los sustentan. Al mostrar su relevancia en la didáctica, se pueden propiciar aprendizajes con entendimiento. Una propuesta a futuro para continuar con la discusión de la relevancia para la didáctica de considerar la tensión discreto-continuo en diferentes ámbitos o contextos de la matemática escolarizada, o cómo las articulaciones identificadas pueden ser el sustento de aproximaciones de enseñanza basadas en la re-construcción orientada del conocimiento. Finalmente, reconocemos otras tensiones relevantes para la didáctica de la matemática, entre las cuales se encuentran: infinito-infinitesimal, exceso-defecto, local-global, entre otras.

Referencias bibliográficas

Adúriz, A. (2010). Aproximaciones histórico-epistemológicas para la enseñanza de conceptos disciplinares. *Revista Virtual EDUCyT, 1*(1), 107–126.

Aristóteles. (1994). *Posterior Analytics* (J. Barnes, Trad.). México: Oxford University Press. (Trabajo original publicado en siglo IV a. C.).

Aristóteles. (1995). *Física* (G. R. de Echandia, Trad.). Madrid: Gredos. (Trabajo original publicado en siglo IV a. C.).

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(3), 163–197.

Descartes, R. (1886). *La géométrie*. Paris: Librairie Scientific.

https://www.gutenberg.org/files/26400/26400-pdf.pdf (Trabajo original publicado en 1637).

Descartes, R. (2006). *A discourse on the method of correctly conducting one's reason and seeking truth in the sciences* (I. Maclean, Trad.). Oxford: Oxford University Press. (Trabajo original publicado en 1637).

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag.

Euclid. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements* (T. L. Heath, Trad.; Vol. II). Cambridge: Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en siglos IV – III a. C.).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Franklin, J. (2014). *An Aristotelian realist philosophy of mathematics: Mathematics as the science of quantity and structure*. London: Palgrave Macmillan.

García, M. (2013). *Interpretaciones de la dualidad en programación lineal* (Tesis de Licenciatura inédita). Querétaro: Universidad Autónoma de Querétaro.

Grattan-Guinness, I. (1980). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 – 1910: Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trad.). New York: Dover.

Luna, F. J. (2016). La unidad de opuestos en Leibniz. *THÉMATA Revista de Filosofía,* 53, 13–30.

Martínez, G., & Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin-American Journal of Physics Education, 2*(2), 201–208.

Neal, K. (2002). *From discrete to continuous: The broadening of number concept in early modern England*. Dordrecht: Springer.

Pla, J. (2009). Matemáticas: Unidad de pensamiento. Diversidad cultural. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *12*(1), 169–190.

Robles Arredondo, M. G., Tellechea Armenta, E., & Font Moll, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69–109.

Rondero Guerrero, C. (2001). *Epistemología y didáctica: Un estudio sobre el papel de las ideas germinales, ponderatio y Æquilibrium, en la constitución del saber físico matemático* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estadios Avanzados del IPN, México.

Rondero Guerrero, C. (2010). Cálculo promedial: El caso de la media aritmética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4–II), 387–408.

Rondero Guerrero, C., & Font Moll, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29–49.

Rondero Guerreo, C., Reyes Rodríguez, A. & Acosta Hernández, J. A. (2015). Aspectos históricos del cálculo de Leibniz: Incidencia y aplicación en la didáctica de las matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 89*, 55–68.

Spivak, M. (2010). *Calculus*. México: Reverté.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Torres, C. (2009). De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano. *Diánoia, 54*(63), 37–70.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática, 8*(2), 5–17.

Tra matematica e filosofia: La *Rithmomachia* di Francesco Barozzi[1]

Between mathematics and philosophy: Francesco Barozzi's *Rithmomachia*

Entre la matemática y la filosofía: la *Rithmomachia* de Francesco Barozzi

Irene Papadaki e Athanasios Gagatsis
Università di Cipro, Cipro

Sunto. *In questo testo viene rievocato uno dei giochi da tavolo più diffusi tra l'XI e il XVI secolo, la Rithmomachia, ovvero "battaglia dei numeri", anche come strumento pedagogico.*

Parole chiave: Francesco Barozzi, gioco da tavolo, Rithmomachia.

Abstract. *In this text, one of the most popular board games between the 11th and 16th centuries, Rithmomachia, or "battle of numbers", is also re-enacted as a pedagogical tool.*

Keywords: Francesco Barozzi, board game, Rithmomachia.

Resumen. *En este texto, uno de los juegos de mesa más populares entre los siglos XI y XVI, la Rithmomachia, o "batalla de números", se evoca también como herramienta pedagógica.*

Palabras claves: Francesco Barozzi, juego de mesa, Rithmomachia.

La familiarizzazione con fondamentali nozioni matematiche attraverso giochi ricreativi attirò l'interesse dei letterati del tardo Medioevo e del Rinascimento in gran parte dell'Europa occidentale. Uno dei giochi da tavolo più diffusi tra l'XI e il XVI secolo fu la cosiddetta *Rithmomachia* ovvero Battaglia dei numeri, nota anche come gioco dei filosofi (*ludus philosophorum*). Sotto l'influsso della tradizione pitagorica, il gioco richiedeva il posizionamento di

[1] La ricerca sulla *Rithmomachia* di Francesco Barozzi da parte degli autori di questo testo è svolta nell'ambito del progetto di ricerca "Mathematical games during the Renaissance: The *Rythmomachia* by Francesco Barozzi", finanziato da A. G. Leventis Foundation.

pezzi con valori numerici su un tavolo rettangolare in modo tale da formare delle medie proporzionali (aritmetiche, geometriche e armoniche). Il godimento del gioco veniva associato al riconoscimento dei numeri come elementi costitutivi dell'ordine universale e all'affinamento delle capacità contemplative dell'anima umana (Moyer, 2001).

Destinato inizialmente alla ristretta cerchia degli uomini di lettere, il gioco è stato introdotto al largo pubblico dei lettori di libri stampati nell'Italia post-tridentina da un manuale scritto dal patrizio veneto-cretese Francesco Barozzi (1537-1604) (Figura 1). L'eminente studioso, il quale fu professore di matematica e filosofia presso l'Università di Padova (Rose, 1978; Barozzi, 2004), affidò la stampa della sua opera a Grazioso Percacino a Venezia nel 1572 (Figura 2).

Nella dedica dell'edizione all'accademico bolognese Camillo Paleotti, Barozzi ammette di attingere largamente a "quel libretto composto in lingua latina da Claudio Buzerio". Si tratta del dettagliato manuale del gioco scritto dal matematico parigino Claude de Boissière (Buxerius, 1556). Un'altra fonte, riferita espressamente da Barozzi, fu una versione della *Rithmomachia* elaborata dall'umanista francese Jacques Lefèvre d'Étaples (Faber, 1496).

Oltre a queste fonti dirette della *Rithmomachia* di Barozzi, è possibile individuare altre fonti taciute di non minore importanza. La ricerca fino ad ora ha dimostrato la dipendenza delle procedure e delle finalità del gioco da principi matematici e filosofici esposti in due trattati di Severino Boezio: il *De institutione arithmetica* ed il *De institutione musica*, i quali si rifanno alle opere del filosofo e matematico neopitagorico Nicomaco di Gerasa (Moyer, 2001; Núñez Espallargas, 2004). Barozzi era comunque più che altro influenzato dal neoplatonismo rinascimentale, soprattutto dal suo lato ermetico, che lo portò perfino davanti al tribunale della Santa Inquisizione (Gialama, 1990). Il suo interesse per la *Rithmomachia* andrebbe quindi considerato come un indizio delle sue posizioni ideologiche ardite per un'epoca di grande crisi intellettuale italiana.

I giochi da tavolo medievali e rinascimentali, come pure i libri ad essi dedicati, hanno suscitato un crescente interesse internazionale negli ultimi decenni (si veda, ad esempio, Evans, 1976; Borst, 1986; Moyer, 2001; Núñez Espallargas, 2004). Come applicazione giocosa del pensiero matematico, praticata per oltre 500 anni, la *Rithmomachia* potrebbe ancora costituire un valido strumento pedagogico, capace di corrispondere anche alle esigenze didattiche odierne.

Figura 1

Ritratto di Francesco Barozzi pubblicato nel libro Procli Diadochi Lycii… in primum Euclidis elementorum librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam Principiurn eruditionis tradentium libri IIII*, Padova 1560*

Figura 2
Il frontespizio della prima edizione della Rithmomachia *di Francesco Barozzi*


IL NOBILISSIMO
ET ANTIQVISSIMO
GIVOCO PYTHAGOREO
NOMINATO
Rythmomachia
CIOE' BATTAGLIA
DE CONSONANTIE
DE NVMERI,
Ritrouato per vtilità, & ſolazzo delli Studioſi.
Et al preſente per Franceſco Barozzi Gentil'huomo
Venetiano in lingua volgare in modo di
Paraphraſi compoſto.

IN VENETIA.
Appreſſo Gratioſo Perchacino. 1572.

Riferimenti bibliografici

Barozzi, F. (1572). *Il nobilissimo et antiquissimo giuoco pythagoreo nominato Rythmomachia cioè battaglia de consonantie de numeri*. Venezia: Gratioso Perchacino.

Barozzi, F. (2004). *Descrittione dell'isola di Creta (1577/8)* (S. Kaklamanis, Ed.). Heraklion: Βικελαία Δημοτική Βιβλιοθήκη.

Borst, A. (1986). *Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel*. Heidelberg: Carl Winter.

Buxerius, C. (1556). *Nobilissimus et antiquissimus ludus Pythagoreus (qui Rythmomachia nominatur) in utilitatem & relaxationem studiosorum comparatus ad veram & facilem proprietatem & rationem numerorum assequendam*. Paris: Gulielmus Cavellat.

Evans, G. R. (1976). The *rithmomachia*: A mediaeval mathematical teaching aid?. *Janus*, 63, 257–273.

Faber, J. (1496). *Rithmimachie ludus que et pugna numerorum appellatur. In Jordanus Nemorarius, Arithmetica decem libris demonstrate*. Paris: Joannes Higmanus et Volgongus Hopilius.

Gialama, D. (1990). Νέες ειδήσεις για τον βενετοκρητικοι λόγιο Φραγκίσκο Barozzi (1537 – 1604) [Nuove notizie sullo studioso veneto-cretese Francesco Barozzi (1537 –1604)], *Thesaurismata*, 20, 300–403.

Moyer, A. E. (2001). *The philosophers' game: Rithmomachia in medieval and renaissance Europe, with an edition of Ralph Lever and William Fulke, the most noble, auncient and learned playe (1563)*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.

Núñez Espallargas, J. M. (2004). La arithmética de Boecio y la ritmomaquia: Teoría y práctica del juego medieval de los sabios. *Anuario de Estudios Medievales*, *34*(1), 279–306.

Rose, P. L. (1977). A venetian patron and mathematician of the sixteenth century: Francesco Barozzi (1537 – 1604). *Studi Veneziani*, I, 119–178.

Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio

Introducing the notion of function through Descartes' algebra of segments

Introducir la noción de función a través del álgebra de segmentos de Descartes

Nicol Imperi ed Enrico Rogora
Dipartimento di matematica, Università degli studi di Roma La Sapienza, Italia

Sunto. *Prima della creazione del calcolo differenziale, una tappa fondamentale nella trattazione matematica delle quantità variabili è la Géométrie di Cartesio (1637), in cui viene introdotta l'algebra dei segmenti. Si tratta di un'algebra con i simboli ma senza i numeri in cui la covariazione tra variabili geometriche, vincolate da costruzioni con riga e compasso o con altre costruzioni geometriche, si può esprimere con equazioni simboliche. Le manipolazioni algebriche permettono di dedurre facilmente le proprietà delle corrispondenti costruzioni geometriche, tra cui quelle che producono i grafici delle funzioni razionali. Crediamo che lo studio delle funzioni con l'algebra di Cartesio possa essere didatticamente efficace nell'insegnamento e apprendimento del concetto di funzione nella scuola secondaria di secondo grado perché, in primo luogo, evita il riferimento ai numeri reali e inoltre, interpretando le formule come costruzioni geometriche e viceversa, facilita il passaggio dalle funzioni intese come processi alle funzioni intese come oggetti.*

Parole chiave: didattica della matematica, storia della matematica, algebra dei segmenti.

Abstract. *In his Géométrie (1637) Descartes introduces the algebra of segments. That's a fundamental step in the mathematical treatment of variable quantities before the creation of the differential calculus. It is an algebra with symbols but without numbers, in which the covariation between geometric variables, constrained by ruler and compass constructions or with other geometric constructions, can be expressed with symbolic equations. By using algebraic manipulations, it is possible to easily deduce the properties of the corresponding geometric constructions, including those that produce graphs of rational functions. We believe that the study of functions through Descartes's algebra can be didactically effective in teaching and learning the concept of function in secondary school. Firstly, it avoids the reference to real numbers; secondly, the interpretation of formulas as geometric constructions and vice versa facilitates the "transition" from functions understood as processes to functions understood as objects.*

Keywords: mathematics education, history of mathematics, segment algebra.

Resumen. *Antes de la creación del cálculo diferencial, un paso fundamental en el tratamiento matemático de las cantidades variables es la Géométrie de Descartes (1637), en la que se introduce el álgebra de segmentos. Es un álgebra con símbolos pero sin números en la que la covariación entre variables geométricas, condicionada por construcciones con regla y compás o con otras construcciones geométricas, puede expresarse con ecuaciones simbólicas. Las manipulaciones algebraicas permiten deducir fácilmente las propiedades de las construcciones geométricas correspondientes, incluidas las que producen las gráficas de funciones racionales. Pensamos que el estudio de funciones con el álgebra de Descartes puede ser didácticamente efectivo en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en la escuela secundaria superior porque, en primer lugar, evita la referencia a números reales; en segundo lugar, la interpretación de fórmulas como construcciones geométricas y viceversa facilita la transición de funciones concebidas como procesos a funciones concebidas como objetos.*

Palabras claves: didáctica de la matemática, historia de la matemática, álgebra de segmentos.

1. Introduzione

Nell'osservazione scientifica di un fenomeno è spesso necessario mettere in relazione due quantità variabili. Nell'antica filosofia naturale le uniche quantità variabili a essere descritte matematicamente sono quelle che variano in maniera uniforme, come ad esempio la posizione degli astri, mentre quantità variabili più generali venivano descritte in maniera esclusivamente qualitativa. Modelli matematici in grado di descrivere tipi di variazioni diverse da quelle uniformi cominciarono a essere elaborati a partire dal medioevo nelle scuole di Oxford e Parigi.[1] Gli strumenti usati furono inizialmente puramente geometrici. Prima della creazione del calcolo differenziale, il modello matematico più raffinato per trattare le quantità variabili fu elaborato da Cartesio nella Géométrie. Il successo del calcolo differenziale, sviluppato pochi anni dopo da Leibniz e Newton, assorbì rapidamente il punto di vista cartesiano mettendo in ombra alcune caratteristiche che, anche da un punto di vista didattico, meritano di essere messe in evidenza. La Géométrie di Cartesio elabora l'approccio di Apollonio allo studio delle coniche raggiungendo nuovi e notevoli risultati, grazie anche al simbolismo algebrico che comincia ad affermarsi con Viète. L'opera di Apollonio, l'ultima delle grandi opere matematiche ellenistiche a essere recuperata e compresa in occidente, contiene i germi di molti sviluppi che portarono a un sostanziale avanzamento delle conoscenze matematiche del XVII, XVIII e XIX secolo. In essa si affronta, tra

[1] Per un'esposizione dettagliata dell'evoluzione storica del concetto di funzione, dall'antichità a Eulero, si rimanda a Youschkevitch (1972).

l'altro, lo studio del sintomo di una conica, cioè dell'equazione (senza simboli) nell'algebra geometrica (senza numeri) di Apollonio.[2]

Il sintomo esprime un particolare tipo di covariazione di due segmenti, vincolati attraverso una costruzione geometrica. Il vincolo, cioè la costruzione geometrica espressa nell'algebra geometrica di Apollonio, diventa così un oggetto matematico, il sintomo. Due curve vengono identificate se hanno lo stesso sintomo e quindi la curva si identifica con il sintomo. Seguendo questa idea Apollonio è in grado di identificare le sezioni coniche con particolari luoghi piani che hanno lo stesso sintomo. I diversi sintomi a cui Apollonio riduce le diverse sezioni coniche vengono descritti con riferimento alle diverse applicazioni delle aree considerate dalla scuola pitagorica, che si distinguono in paraboliche, iperboliche ed ellittiche. È dalla relazione con queste costruzioni che Apollonio sceglie i nomi ancora oggi in uso.

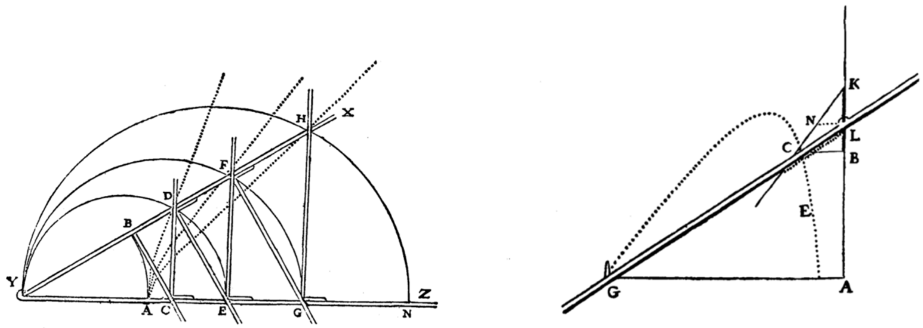
Noi identifichiamo il sintomo con un'equazione nell'algebra dei polinomi costruita su un'algebra di numeri. Apollonio non usa i numeri, né le variabili né le equazioni per descrivere il sintomo di una curva. Cartesio lo fa in un'algebra dei segmenti che è a metà strada tra quella geometrica di Apollonio e quella che utilizziamo oggi. Nell'algebra dei segmenti le operazioni corrispondono a costruzioni geometriche più generali delle applicazioni delle aree considerate da Apollonio e possono esprimersi con il formalismo simbolico di Viète. Il sintomo di una curva diventa, con Cartesio, un'equazione simbolica nell'algebra dei segmenti.

L'algebra di Cartesio permette di esprimere il sintomo di quelle curve che, introducendo coordinate numeriche, si possono riguardare come grafici di funzioni razionali di x e della radice quadrata di x; questi grafici sono luoghi geometrici su cui è possibile costruire con riga e compasso un numero finito qualsiasi di punti. Introducendo ulteriori strumenti (il compasso e il meccanismo di Cartesio) (Figura 1) è possibile costruire punti sulle curve che si possono riguardare come grafici di funzioni algebriche più generali, che non tratteremo in questo lavoro dedicato all'insegnamento secondario.

---

[2] Il sintomo della parabola è così descritto da Apollonio:
Se un cono è tagliato da un piano che passa per il suo asse, e anche da un altro piano che taglia la base del cono lungo una linea retta perpendicolare alla base del triangolo assiale, e se inoltre il diametro della sezione è parallelo a uno dei lati laterali del triangolo assiale, e se una qualsiasi linea retta è tracciata dalla sezione del cono al suo diametro in modo tale che questa linea retta sia parallela alla sezione comune del piano secante con la base del cono, allora il quadrato di questa linea retta abbassata sul diametro sarà uguale al rettangolo determinato dal segmento condotto dal vertice della sezione al punto dove il segmento abbassato sul diametro lo interseca e da un altro segmento che sta al segmento tra l'angolo del cono e il vertice della sezione come il quadrato sulla basse del triangolo assiale sta al rettangolo determinato dai rimanenti lati del triangolo. Chiamo parabola una tale sezione. (Heiberg, 1891, pp. 36–38, traduzione a cura degli Autori).
Usando la notazione algebrica e un sistema di riferimento opportuno, questo sintomo si riduce semplicemente all'equazione $ay = x$.

Figura 1
Queste sono le figure con cui Cartesio nella Géométrie illustra gli strumenti per estrarre le radici qualsiasi di un segmento (compasso di Cartesio a sinistra, Descartes, 1637, p. 318) e per dividere un angolo in un numero qualsiasi di parti congruenti (meccanismo di Cartesio a destra, Descartes, 1637, p. 320)



Gli aspetti caratteristici dell'approccio cartesiano alla costruzione e alla definizione di curva che ci interessa mettere in evidenza sono i seguenti:

- la modellizzazione della variabilità geometrica elementare con il segmento variabile (invece del numero variabile), che permette un modello sufficientemente ricco e intuitivo che evita il riferimento ai numeri;
- la modellizzazione del processo di costruzione di particolari relazioni tra quantità (geometriche) variabili attraverso costruzioni con riga e compasso;
- l'algebrizzazione delle relazioni, che si accompagna all'uso dei simboli e del calcolo simbolico.

Si tratta di processi cruciali nella costruzione del concetto di funzione a partire dai processi di calcolo con la mediazione del simbolismo algebrico, che vengono però percorsi in un contesto diverso da quello ormai abituale delle variabili numeriche e dell'algebra dei numeri, ed ha quindi una base più intuitiva e costruttiva. Ci sembra per questo un contesto didatticamente più semplice e propedeutico, di cui intendiamo esplorare le potenzialità.

Questo lavoro si colloca in un filone di nicchia della ricerca in didattica della matematica, che riguarda l'utilizzo di materiali originali nell'insegnamento. Non presenta analisi di sperimentazioni in classe ma, nel paragrafo conclusivo, si fa cenno all'uso che ne abbiamo fatto nella formazione degli insegnanti in servizio e dei futuri insegnanti.

I due punti principali da considerare per collegare la nostra alle numerose ricerche sull'insegnamento e apprendimento del concetto di funzione che si sono sviluppate negli ultimi anni (Niss, 2020) sono i seguenti:

- la possibilità di utilizzare un approccio basato sulla considerazione di figure geometriche variabili per superare le difficoltà iniziali collegate all'uso dei numeri per modellizzare la nozione di variazione;
- la possibilità di utilizzare l'approccio algebrico ma non numerico suggerito da Cartesio per modellizzare rigorosamente e quantitativamente la co-variazione di figure variabili.

Il primo punto è stato ampiamente considerato nella ricerca in didattica, (si veda per esempio: Carlson & Oerthman, 2005; Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007; Antonini, Baccaglini-Frank, & Lisarelli, 2020) dove viene riconosciuto il ruolo importante che può svolgere un software di geometria dinamica a riguardo, come nella citazione seguente:

> L'uso dello strumento di trascinamento permette dunque da un lato di visualizzare i due movimenti e la relazione tra i due movimenti, cioè la relazione tra le variazioni (la covariazione), dall'altro di sperimentare "fisicamente", tramite l'uso manuale del mouse (o di un dito nel caso di strumenti touchscreen), la dipendenza di un punto da quello del punto trascinato. (Colacicco, Lisarelli, & Antonini, 2017, p. 13)

Il carattere principale dell'applicazione di software di geometria dinamica all'apprendimento/insegnamento del concetto di funzione in questi lavori è riassunto nei termini *visualizzare* e *sperimentare.* L'impiego è quindi mirato a sviluppare buone immagini intuitive dell'idea di covariazione. Noi proponiamo una cosa diversa e complementare: quella di *costruire* diverse tipologie di covariazione, evitando l'impiego di funzioni numeriche, come è il caso in tutta la letteratura consultata (si veda, per esempio: Colacicco et al., 2017, p. 13) ma attraverso l'impiego di strumenti geometrici e di formule algebriche. Nel nostro approccio le formule non rimandano a procedure di calcolo ma a costruzioni geometriche; questo permette di evitare, all'inizio del percorso di apprendimento, la necessità di esprimere con i numeri la continuità di una covariazione e quindi di rinunciare a un approccio rigoroso che richiederebbe la difficile costruzione dei numeri reali e l'introduzione del concetto di limite. Su questo punto non siamo a conoscenza di letteratura specifica e quindi in ciò si possono ravvisare i maggiori elementi di originalità del nostro lavoro.

Concludiamo questa introduzione con una riflessione sull'uso del software. Riteniamo particolarmente efficace l'uso di software di geometria dinamica nella progettazione di materiali didattici che seguano l'evoluzione storica dei concetti matematici perché un software di geometria dinamica consente un accesso all'officina mentale dell'autore di un testo antico che permette di guardare ai problemi attraverso i suoi occhi (Brigaglia, Raspanti, & Rogora, 2021). Esso facilita la ricostruzione dei processi geometrici costruttivi (Blåsjö, 2021) che, pur giocando un ruolo secondario nella matematica contemporanea, hanno permesso e permettono di arricchire le immagini dei concetti matematici attraverso l'acquisizione di un'intuizione geometrica di grande valore comunicativo su cui è bene far leva nei processi di apprendimento e insegnamento.

2. Le potenzialità didattiche dell'approccio cartesiano alla covariazione

Nelle scuole secondarie di secondo grado si introduce la definizione di funzione reale di variabile reale come caso particolare della definizione insiemistica generale di funzione. La ricerca didattica ha riconosciuto le difficoltà relative all'apprendimento del concetto di funzione come esemplari di alcuni degli aspetti più critici nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica (Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983).

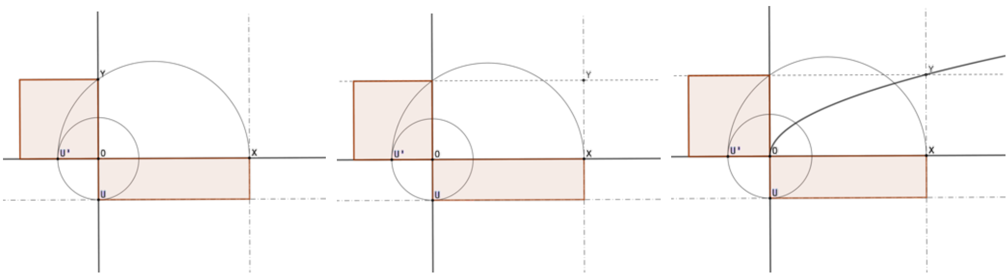
La definizione di funzione reale di variabile reale presuppone la conoscenza dell'insieme dei numeri reali, la cui trattazione è complessa, non viene normalmente svolta in maniera rigorosa nelle scuole secondarie e viene raramente recepita dagli studenti. Ad essi viene chiesto di operare su oggetti di cui hanno normalmente una comprensione parziale, impiegando algoritmi di calcolo non ben padroneggiati nella loro generalità e accettati per "atto di fede" (si pensi al calcolo della radice quadrata di un numero). Lo scarso contenuto operativo del calcolo numerico emerge in tutta la sua gravità nel momento in cui viene chiesto di operare sulle funzioni stesse o di immaginare funzioni meno standard e ciò si verifica anche negli studenti universitari, in cui si presuppone una maggiore conoscenza, almeno operativa, dei numeri; condividiamo quindi l'opinione di chi crede che la definizione insiemistica di funzione e lo studio delle funzioni reali di variabile reale dovrebbe apparire non come il punto di partenza, ma come il risultato di un processo didattico mirato a costruire buone immagini mentali del concetto anche attraverso la ricostruzione della sua evoluzione storica.

Per mettere in luce le ragioni per cui l'approccio algebrico di Cartesio alla costruzione dei luoghi di punti prodotti da costruzioni geometriche fornisce una comprensione più immediata,[3] consideriamo la costruzione del segmento $\sqrt{x}$ a partire dal segmento x (Figura 2). La costruzione, dal punto di vista geometrico, è quella di un segmento tale che il quadrato costruito su di esso è uguale al rettangolo costruito sul segmento di partenza x e su un segmento fissato, che possiamo pensare come unitario.

[3] Cioè non mediata da conoscenze matematiche sofisticate.

Figura 2

Le tre immagini rappresentano le tre fasi per rappresentare una covariazione geometrica: la costruzione del segmento covariante in direzione ortogonale; il suo trascinamento sopra a quello variabile; la visualizzazione della traccia. Dato il rettangolo OUX, per costruire il quadrato equivalente basta prendere come lato il medio proporzionale OY tra i lati OU e OX del rettangolo (figura a sinistra). Sia XY il segmento parallelo e congruente a OY (figura al centro). Abbiamo usato lo stesso simbolo Y per comunicare l'idea che stiamo trascinando il punto variabile su una retta in movimento. Al variare di X il luogo dei punti Y descrive una curva–luogo che ci permette di visualizzare la covariazione geometrica della costruzione indicata. Nell'algebra di Cartesio la covariazione è descritta dall'equazione $y = \sqrt{x}$ dove abbiamo indicato con x e y i segmenti variabili OX e OY rispettivamente. In questo approccio la radice non rappresenta un'operazione numerica ma una costruzione geometrica



La costruzione del segmento radice OY è la stessa per tutti i segmenti OX, e la variazione di OX avviene con continuità, immaginando di trascinare il punto X sulla retta OX, come materialmente si può fare con un software di geometria dinamica come GeoGebra (Hoenwarter, 2002).

Per realizzare la stessa operazione con i numeri, trasformando la variabile numerica x in $y = \sqrt{x}$, la continuità dell'operazione è molto meno concreta, dovendo passare attraverso calcoli di natura assai diversa, per esempio $\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\pi}$, ecc. Immaginare una continuità dietro queste operazioni richiede uno sforzo di astrazione più difficile, che oscura l'immediatezza della variazione e covariazione geometrica (della x e della y rispettivamente). La covariazione si realizza attraverso una costruzione geometrica che presenta la stessa difficoltà per tutti i segmenti e che, come ci insegna Cartesio, è esprimibile con un'equazione nell'algebra dei segmenti.

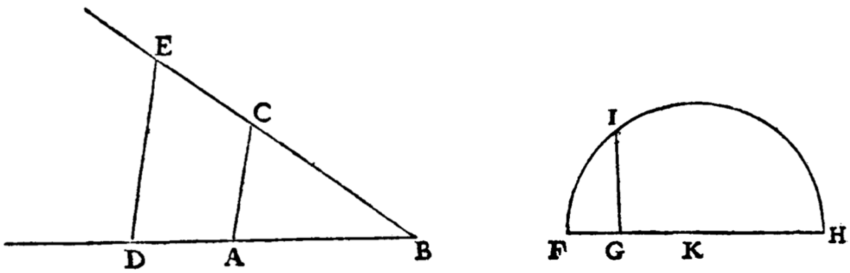
3. L’algebra dei segmenti

Cartesio nella sua Géométrie comincia col mostrare come, con riga e compasso, siano costruibili a partire da due segmenti qualsiasi la somma, la differenza, il prodotto, la divisione e la radice quadrata. È il primo a comprendere l’utilità di pensare al prodotto e al quoziente tra due segmenti come a un segmento. Negli elementi di Euclide il prodotto tra due segmenti è un rettangolo, mentre il quoziente è un rapporto, nel senso specificato da Eudosso ed esposto nel Libro V. La semplice idea di basare le costruzioni su un segmento fissato (il segmento unità) permette di definire un’algebra geometrica molto più efficace di quella utilizzata dai Greci, usando la quale è possibile descrivere matematicamente meccanismi di covariazione complicati senza dover utilizzare i numeri.

Leggiamo le parole che usa Cartesio (1637) per introdurre le operazioni fondamentali dell’algebra dei segmenti nel libro primo della Géométrie, dove indica come costruire con riga e compasso prodotto, divisione ed estrazione di radice.

> Tutti i problemi della Geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che poi, per costruirli, non bisogna conoscere altro che la lunghezza di alcuni segmenti. E come tutta l’aritmetica non si compone che di quattro o cinque operazioni che sono l’Addizione, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Divisione e l’Estrazione di radice (che può essere vista come una sorta di Divisione),così anche in geometria per trovare dei segmenti è solo necessario sommare o sottrarre altri segmenti; e anche, tracciando un segmento, che chiamerò unità in modo da collegarlo il più possibile ai numeri, e che in generale può essere scelto arbitrariamente, e avendo tracciato altri due segmenti, è possibile trovarne un quarto che sta a uno di questi due come l’unità sta all’altro (il che è la stessa cosa della moltiplicazione); o, ancora, trovarne un quarto che sta a uno dei due come l’unità sta all’altro (che è la stessa cosa della divisione); o infine, trovare uno, due, o più medi proporzionali tra l’unità e altri segmenti (che equivale a estrarre la radice quadrata, cubica, ecc. del segmento dato). E io non esiterò a introdurre questi termini aritmetici nella geometria, al fine di rendere maggior chiarezza.
>
> La Moltiplicazione [Figura 3 a sinistra]. Sia ad esempio AB l’unità, e poniamo di dover moltiplicare BD per BC; non devo fare altro che unire i punti A e C, e poi tracciare DE parallela a CA, e BE è il prodotto di questa Moltiplicazione.
>
> La Divisione [Figura 3 a sinistra]. Oppure se si deve dividere BE per BD, avendo unito i punti B ed E, traccio AC parallela a DE, e BC è il risultato di questa divisione.
>
> L’estrazione della radice quadrata [Figura 3 a destra.]. O ancora, se si deve tracciare la radice quadrata di GH aggiungo ad esso sulla stessa retta FG, che è l’unità, e dividendo FH in due parti uguali nel punto K, da esso traccio la circonferenza FIH; dopodiché alzando una linea retta fino a I ad angolo retto rispetto a FH, GI è la radice cercata. Non dirò nulla qui della radice cubica, né delle altre, poiché ne parlerò adeguatamente dopo. (Descartes, 1632, pp. 297–298, traduzione a cura degli Autori).

Figura 3
Fissato un segmento unità il teorema di Talete permette di interpretare prodotto e rapporto di due segmenti come un segmento (figura a sinistra, Descartes, 1637, p. 298). Il medio proporzionale tra un segmento e l'unità rappresenta la radice del segmento (figura a destra, Descartes, 1637, p. 298)



Combinando le costruzioni ora viste, a partire da un segmento x si può costruire con riga e compasso un segmento y la cui dipendenza da x si esprime nell'algebra dei segmenti attraverso un'espressione razionale $y = f(x)$ (di x o della radice di x). Possiamo trasportare y in modo da far coincidere un estremo con l'estremo variabile di x, perpendicolarmente a x. L'altro estremo traccia un luogo che si può visualizzare in maniera molto efficace con GeoGebra: il grafico della funzione f. La costruzione con riga e compasso lega in maniera a nostro avviso più naturale il grafico all'espressione di quanto non lo facciano le operazioni aritmetiche sui numeri (si veda la discussione sulla radice quadrata che abbiamo fatto in fondo al paragrafo 2).

Utilizzando l'algebra dei segmenti, Cartesio spiega come una costruzione geometrica corrisponda alla soluzione di un sistema di equazioni polinomiali. Se il sistema non è determinato e si riconduce a una sola equazione in due incognite si ottiene il luogo al variare del segmento. Il nostro intento è quello di mostrare come sia possibile attraverso una serie di costruzioni geometriche elementari che si possono codificare in un'espressione algebrica specificare il collegamento tra due segmenti variabili. Crediamo che, dal punto di vista dello studente, utilizzare i segmenti invece dei numeri e le costruzioni riga e compasso invece delle operazioni numeriche permetta di dare un senso più concreto alla variazione e alla covariazione continua di oggetti matematici, preparando la strada a una comprensione migliore del concetto di funzione reale di variabile reale e di funzione generale.

La Géométrie è una delle opere fondamentali della Matematica (Serfati, 2005). Per un'esposizione introduttiva dei contenuti, in cui sono presentate molte delle considerazioni su cui si fonda questa proposta, suggeriamo Rogora (2016). Un'analisi approfondita del testo e del contesto in cui si colloca la

Géométrie, con un'ampia bibliografica, si trova in Bos (2001). Essendo la prima opera matematica che un matematico contemporaneo può leggere e capire senza una preparazione specifica, consigliamo caldamente la lettura dell'originale, facilmente reperibile in rete.[4]

Per evitare fraintendimenti, ci preme sottolineare che tra gli scopi della Géométrie non è contemplato quello di sviluppare, neanche a livello embrionale, il concetto di funzione nel senso moderno. Lo scopo del lavoro di Cartesio è quello di applicare alla soluzione dei problemi geometrici il suo metodo generale per ben ragionare (esposto nel *Metodo,* di cui la *Géométrie* è un'appendice). Resta comunque il fatto che gli strumenti introdotti da Cartesio per dar sostanza al suo programma offrono, secondo noi, anche la possibilità di trasformare rigorosamente ma in modo più intuitivo il concetto di covariazione continua di quantità variabili in un oggetto matematico, senza usare la teoria degli insiemi, i numeri reali, la nozione di funzione e la nozione di limite.

4. Una proposta di percorso didattico

Sulla base delle riflessioni fatte in precedenza, proponiamo un percorso didattico da svolgere in una classe di scuola secondaria di secondo grado. In questo lavoro suggeriamo le tappe principali del percorso senza entrare nei dettagli di implementazione che saranno trattati esaustivamente in altra sede. La proposta ha carattere laboratoriale e sfrutta il software di geometria dinamica GeoGebra (Hoenwarter, 2002).

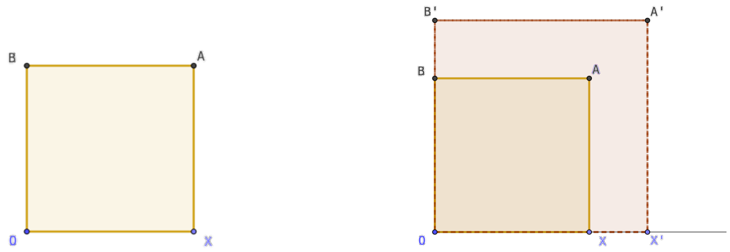
4.1. Il grafico della funzione quadrato $y = x^2$

Consideriamo un segmento OX variabile e su di esso costruiamo un quadrato, come indicato in Euclide I.46 (Figura 4). Variando il punto X, il quadrato prodotto dalla costruzione si adatta con continuità alla variazione del segmento, come si sperimenta facilmente con un software di geometria dinamica.

[4] Per una traduzione italiana si può consultare l'edizione delle opere di Cartesio a cura di Giulia Belgioioso, pubblicata nel 2009 da Bompiani.

Figura 4

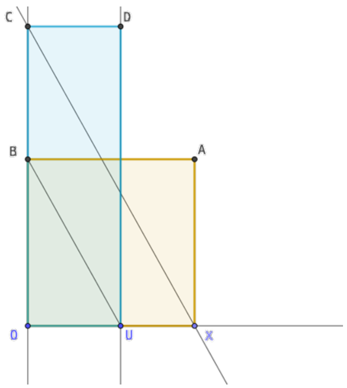
Nella figura a sinistra, la costruzione di un quadrato. Nella figura a destra, il quadrato più grande è ottenuto trascinando la costruzione con l'estremo variabile X del segmento OX



Nel quadrato variabile, variano contemporaneamente tutti e quattro i lati. Pensiamo di fissare sulla semiretta OX un punto fisso U e costruiamo su OU il rettangolo equivalente al quadrato di lato OX. A tal fine, tracciamo da X la parallela a BU (Figura 5), che interseca la retta OB in C. Il teorema di Talete ci dice che $OX: OU = OC: OB$ ovvero il rettangolo cercato è quello di lati OU e OC.

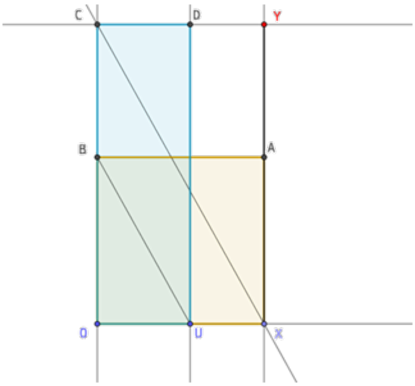
Figura 5

Uso del teorema di Talete per costruire un rettangolo equivalente a un quadrato



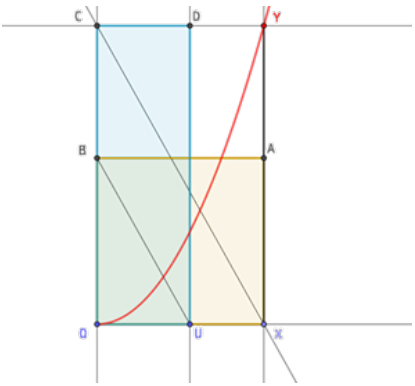
La scelta di U quindi ci ha permesso di rappresentare la variazione dell'estensione del quadrato su OX con un rettangolo che ha un segmento fisso e uno variabile. Abbiamo quindi concentrato la variazione del quadrato su OX in quella di un singolo segmento OU, che possiamo trasportare su XY, perpendicolare alla semiretta OU (Figura 6).

Figura 6
Trasporto di un lato di un rettangolo avente l'altro lato fisso perpendicolarmente a un segmento variabile



Il luogo di punti Y è quindi in grado di rappresentare la variazione del quadrato OX (Figura 7).

Figura 7
Luogo generato dagli estremi del segmento XY al variare dell'estremo X del segmento variabile OX



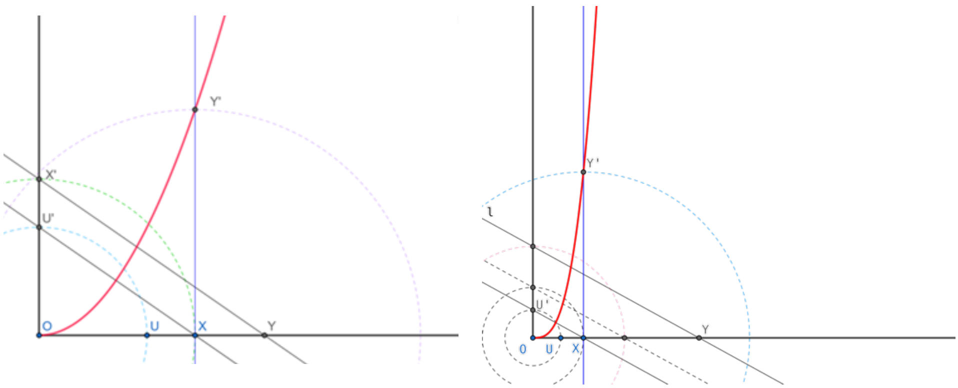
Nell'algebra di Cartesio, la proporzione $y: x = x: 1$ (dove $1 = OU$, $x = OX = OB$ e $y = OY = OY'$), che descrive il "sintomo" della curva luogo di punti Y si può esprimere con l'equazione $y = x^2$.

Iniziamo con la costruzione geometrica del quadrato di un segmento OX in cui O è fisso e X è libero di variare, e mostriamo come nell'algebra di Cartesio il quadrato di un segmento sia a sua volta un segmento. Introduciamo l'idea di come conviene procedere per visualizzare una covariazione tra segmenti variabili: partendo dalla semiretta di origine O, su cui viene fissato il segmento unità OU, si costruisce il segmento variabile OX. Dopodiché si trasporta il segmento OYcostruito a partire dal segmento OXsulla retta perpendicolare passante per X, in modo da “separare” le variazioni e così generare il luogo (curva) descritto dal punto Y'. Nell'algebra di Cartesio, il "sintomo" della curva luogo costruita con questa covariazione geometrica si può esprimere con la proporzione $y: x = x: 1$, (dove $1 = OU$, $x = OX$ e $y = OY = OY'$) da cui si ottiene l'equazione $y = x^2$. Grazie all'introduzione dell'unità, ogni rapporto e ogni prodotto si può rappresentare con un segmento. Le equazioni perdono l'omogeneità delle proporzioni ma sono più flessibili.

4.2. Il grafico della funzione cubo $y = x^3$

Nell'algebra di Cartesio possiamo rappresentare con un segmento anche il cubo di un segmento OX, senza bisogno di passare attraverso una costruzione tridimensionale del cubo. Moltiplicando il segmento $OY = x^2$ ottenuto nella costruzione precedente per il segmento x usando ancora il teorema di Talete, possiamo costruire il segmento $y = x^3$ il cui luogo, variando X e usando il linguaggio delle funzioni, descrive il grafico di $y = x^3$ (Figura 8).

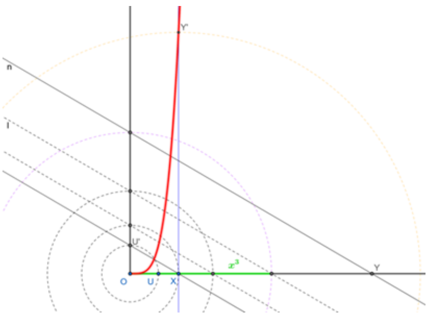
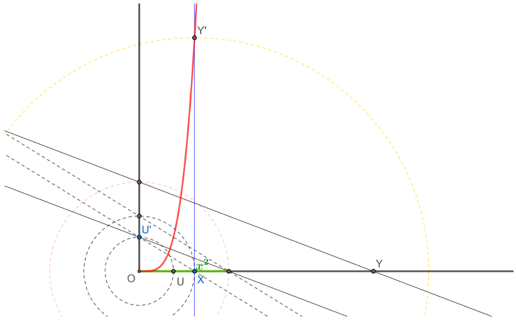
Figura 8
A sinistra, la costruzione del segmento XY' che rappresenta OX^2 nell'algebra di Cartesio, viene condotta in maniera leggermente diversa da quella che abbiamo descritto nella sottosezione 4.1 che si presta più facilmente all'iterazione. Si riporta il segmento OU sul semiasse ortogonale, intersecando la circonferenza centrata in O e passante per U con il semiasse nel punto U'. Analogamente, si riporta il segmento OX su OX'. Per il teorema di Talete, la parallela per X' a XU' sega il semiasse OX in un punto Y tale che $OY = OX^2$. L'estremo Y' del segmento XY' congruente a OY sulla perpendicolare a OX per X nel semipiano contenente X' (che si può costruire con riga e compasso usando Euclide I.2) descrive il grafico di $y = x^2$.
A destra, per moltiplicare il segmento x^2 ottenuto al passo precedente e indicato in verde in figura basta riportare il suo estremo sul semiasse OU' con il compasso e tracciare la parallela a $U'X$ dal punto ottenuto. La sua intersezione Y con il semiasse OX determina il segmento $OY = OX^3$. L'estremo Y' del segmento XY' congruente a OY descrive il grafico di $y = x^3$.



4.3. Il grafico della funzione ipercubo $y = x^4$

Nell'algebra di Cartesio possiamo costruire facilmente il grafico della funzione $y = x^4$, che geometricamente non è associata ad alcuna figura elementare nello stesso senso in cui il quadrato è associato a $y = x^2$ e il cubo a $y = x^3$. Il segmento x^4 si può ottenere sia moltiplicando x^3 per x, sia moltiplicando x^2 per x^2 (Figura 9).

Figura 9

Costruzione del segmento $y = x \cdot x^3$	*Costruzione del segmento* $y = x^2 \cdot x^2$
	

4.4. Il grafico di una funzione polinomiale:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

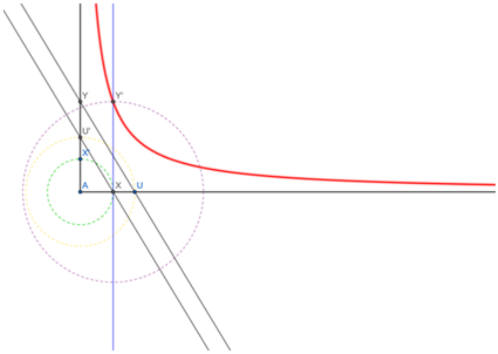
Dopo aver mostrato la procedura per costruire le potenze di un segmento x, dovrebbe essere chiaro come sia possibile costruire con riga e compasso i segmenti che, rispetto all'unità di misura fissata rappresentano, nell'algebra di Cartesio, il segmento $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Anche i coefficienti a_i della combinazione sono rappresentati nell'algebra di Cartesio da segmenti, che si possono disegnare in un software di geometria dinamica in modo tale da poter interpretare geometricamente la dipendenza dai parametri del grafico della funzione polinomiale semplicemente trascinando gli estremi di questi segmenti.

4.5. Il grafico della funzione reciproco $y = \frac{1}{x}$

Anche la costruzione $y = \frac{1}{x}$, e quindi il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$, può essere realizzato molto facilmente con l'algebra di Cartesio (Figura 10).

Figura 10

Costruzione del segmento $y = \frac{1}{x} = XY'$ a partire dal segmento $x = AX$, utilizzando il teorema di Talete

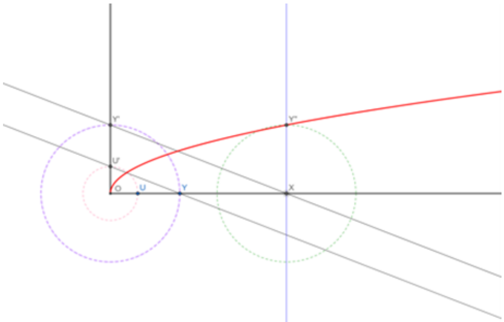


4.6. Il grafico della funzione radice quadrata $y = \sqrt{x}$

Come ricordato nel paragrafo 3, Cartesio insegna anche a costruire con riga e compasso la radice quadrata di un segmento x e quindi il grafico della funzione $y = \sqrt{x}$ (Figura 11).

Figura 11

Costruzione del segmento $y = \sqrt{x} = XY''$ a partire dal segmento $x = OY$

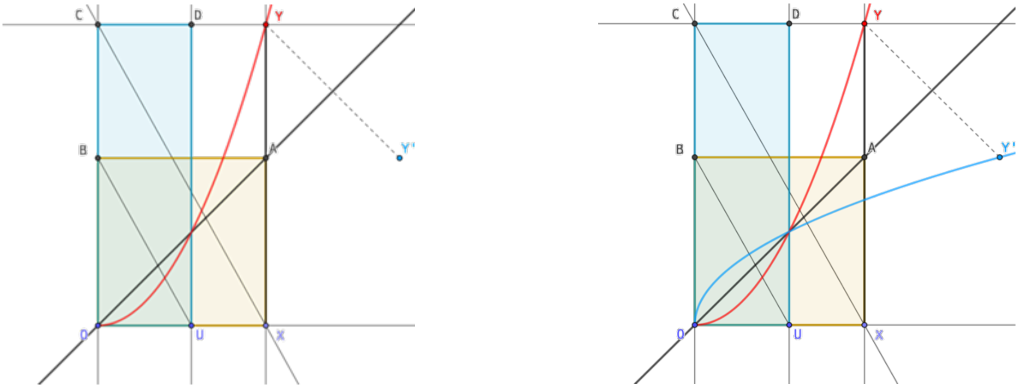


5. Osservazioni conclusive

Combinando quanto visto finora non è difficile immaginare come costruire con riga e compasso la curva luogo corrispondente al grafico di una funzione del tipo $y = f(x)$ e di $y = f(\sqrt{x})$ dove f è una funzione razionale. È bene tenere a mente che i luoghi che abbiamo costruito non sono costruzioni con riga e compasso. Una costruzione con riga e compasso produce un punto del luogo ma la variazione continua di questo punto, che ci viene mostrata da un software di Geometria, cioè l'intera curva, non lo è.[5]

Con la funzione luogo di GeoGebra si può disegnare anche il grafico della funzione inversa di una funzione di cui si è già costruito il luogo. Si consideri un punto Y sul grafico di una funzione $y = f(x)$ e se ne costruisca il simmetrico, con riga e compasso, rispetto alla bisettrice dei due semiassi. Il luogo di questi punti disegna il grafico della funzione inversa (Figura 12).

Figura 12
Il luogo dei punti simmetrici rispetto alla bisettrice dei due semiassi dei punti del grafico di $y = f(x)$ *è il grafico della funzione* $y = f^{-1}(x)$



Si noti però che questa costruzione non realizza una costruzione con riga e compasso di un segmento $z = f^{-1}(y)$ a partire da un segmento y ma solo a partire da un segmento $y = f(x)$. La costruzione di $f(y)$ dato y non è in generale possibile con riga e compasso. Per esempio, è possibile costruire, con riga e compasso, un numero finito qualsiasi di punti del grafico della radice cubica ma non la radice cubica di un segmento.

Quanto detto mette in evidenza un aspetto del grafico di una funzione come oggetto matematico su cui è possibile operare con costruzioni di livello superiore rispetto a quelle che ci hanno permesso di "costruire i punti del grafico di una funzione": un passaggio fondamentale della "reificazione" (Sfard, 1992) di un concetto. Per finire, osserviamo come abbiamo sempre limitato la costruzione del grafico al quadrante compreso tra due semiassi ortogonali aventi un estremo comune. L'algebra di Cartesio è un'algebra di segmenti, non di segmenti orientati, ed esclude quindi la trattazione geometrica diretta di quantità negative. Su questo aspetto contiamo di tornare

[5] Le sole curve costruibili con riga e compasso sono unioni finite di archi di circonferenze e di segmenti.

in un successivo lavoro.

Le attività proposte non sono state testate in classi di scuola superiore. Abbiamo svolto però diverse attività con insegnanti in servizio e futuri insegnanti.

Nell'a.a. 2021-22 in uno dei progetti proposti agli studenti del corso di Istituzioni di Matematiche Complementari della laurea Magistrale in Matematica della Sapienza abbiamo chiesto di preparare schede didattiche per un percorso da svolgere in una classe seconda per introdurre i ragazzi alla nozione di covariazione di quantità variabili con l'algebra di Cartesio. I lavori sono stati discussi durante le prove orali.

Tenendo presente le risultanze e le difficoltà incontrate dagli studenti, abbiamo progettato un laboratorio che è stato proposto a 14 insegnanti in servizio durante il convegno CIIM 2022 di L'Aquila. Le schede del laboratorio sono disponibili su https://www.geogebra.org/classroom/qmsvwtqe.
Il laboratorio è durato due ore a cui sono seguiti 30 minuti di discussione. Abbiamo utilizzato lo strumento GeoGebra Classroom (https://www.geogebra.org/m/hncrgruu).
Al termine dell'attività è stato consegnato ai partecipanti un questionario dal quale è emerso:

- sorpresa nel constatare come sia possibile esprimere la nozione di covariazione e di continuità di una covariazione in maniera quantitativa senza utilizzare i numeri;
- sorpresa nel constatare che i grafici delle funzioni razionali siano ottenibili "trascinando" una costruzione realizzata con riga e compasso;
- interesse a sperimentare a scuola questo percorso progettando schede più diluite e dettagliate;
- difficoltà nel comprendere immediatamente il senso della proposta ma anche interesse nel riconoscere la possibilità di poter affrontare alcuni nodi complessi dell'insegnamento della matematica in modo rigoroso e quantitativo evitando le complessità relative all'introduzione dei numeri reali e delle relative operazioni.

Indipendentemente da un'eventuale (e secondo noi auspicabile) trasposizione in classe, le sperimentazioni fatte ci convincono quindi dell'utilità di presentare questo approccio nella formazione degli insegnanti e dei futuri insegnanti. Con esso è possibile mettere in luce alcune difficoltà relative all'uso dei numeri per rappresentare quantitativamente nozioni intuitive quali movimento e continuità. Queste difficoltà sono, a nostro avviso, trascurate nell'insegnamento in quanto non vengono presentate alternative alla trattazione numerica della covariazione se non da un punto di vista qualitativo. La proposta avanzata in questo lavoro, di combinare l'algebra dei segmenti di Cartesio con l'impiego di un software di Geometria Dinamica, è una possibile alternativa completamente rigorosa.

Riferimenti bibliografici

Antonini, S., Baccaglini-Frank, A., & Lisarelli, G. (2020). From experiences in a dynamic environment to written narratives on functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *6,* 1–29.

Blåsjö, V. (2021). Operationalism: An interpretation of the philosophy of ancient Greek geometry. *Foundation of Science, 27*, 587–708.

Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness.* New York: Springer.

Brigaglia, A., Raspanti, M. A., & Rogora, E. (2021). L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *6*(1), 37–67.

Carlson, M. P., & Oerthman, M. (2005). *Research Sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function*. https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function

Colacicco, G., Lisarelli, G., & Antonini, S. (2017). Funzioni e grafici in ambienti digitali dinamici. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula.* 2, 7–25.

Descartes, R. (1637). *Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores et la Géométrie.* Leyde: Ian Maire.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & Harel, G. (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85–106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 317–333.

Heiberg, J. L. (1891). *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiqua.* Leipzg: Teubner.

Hoenwarter, M. (2002). *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene* (Thesis). Salzburg: Universität Salzburg.

Niss, M. (2020). Functions learning and teaching. In S. Lerman, (Ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 303–306). New York: Springer.

Rogora, E. (2016). *Cartesio*. Milano: Edizioni Corriere della Sera.

Serfati, M. (2005). René Descartes *Geometria* (1649). In I. Grattan–Guinness (Ed.), *Landmark writings in Western Mathematics (1640–1940)* (pp. 1–22). Amsterdam: Elsevier.

Sfard, A. (1992). Operational origin of mathematical objects and the quandary of reification – the case of functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25–58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), 37–85.

Riflessioni su certi dannosi modi di stravolgere l'apprendimento della matematica

Reflections on certain harmful ways of distorting the learning of mathematics

Reflexiones sobre ciertas formas nocivas de distorsionar el aprendizaje de la matemática[1]

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1] *DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.*

[2] *NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia.*

Sunto. *In Didattica della Matematica si è evidenziato da decenni il problema dello scivolamento metadidattico (glissement metadidactique) evidenziato da Guy Brousseau. Ma la pratica didattica scolare propone modelli di comportamento (insegnamento-apprendimento della Matematica) dai quali si evince che il tema è del tutto sconosciuto. In questo articolo si presenta il problema e si danno vari esempi negativi della sua influenza, soprattutto per quanto riguarda l'ingenua interpretazione della cosiddetta euristica di Polya relativa alla risoluzione dei problemi di Matematica.*

Parole chiave: scivolamento metadidattico, contratto didattico, teoria ingenua degli insiemi, scrittura posizionale dei numeri, risoluzione dei problemi.

Abstract. *In Mathematics Education, the problem of metadidactic slippage (glissement metadidactique) has been highlighted for decades by Guy Brousseau. But school teaching practice proposes patterns of behavior (teaching-learning of Mathematics) from which it is evident that the theme is completely unknown. In this paper we present the problem and gives several negative examples of its influence, especially with regard to the naive interpretation of Polya's so-called heuristics related to the problem solving in Mathematics.*

Keywords: metadidactic slippage, didactical contract, naive set theory, positional number writing, problem solving.

Resumen. *En Didáctica de la Matemática, el problema del deslizamiento metadidáctico (glissement metadidactique) puesto de manifiesto por Guy Brousseau*

---

[1] Articolo invitato/ Invited article/artículo invitado.

se ha destacado durante décadas. Pero la práctica didáctica escolar propone modelos de comportamiento (enseñanza-aprendizaje de la Matemática) de los cuales parece que se desconoce por completo la cuestión. En este artículo se presenta el problema y se dan varios ejemplos negativos de su influencia, especialmente en lo que tiene que ver con la interpretación ingenua de la llamada heurística de Polya relativa a la resolución de problemas de Matemática.

Palabras clave: deslizamiento metadidáctico, contrato educativo, teoría ingenua de conjuntos, escritura posicional de números, resolución de problemas.

1. La risoluzione dei problemi di matematica

La produzione non scientifica ma divulgativa del grande matematico ungherese-statunitense George Polya (1887 – 1985) si è sviluppata fra il 1945 e il 1967; si tratta dei due famosi libri tradotti in molte lingue: 1. *How to Solve It*; 2. *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*. (Polya, 1945/1967, 1954). In questi libri divulgativi, Polya ha illustrato e reso noto al vasto pubblico il suo modo personale di affrontare e risolvere i problemi, modo davvero geniale, ammirato da tutti quei matematici che hanno apprezzato i suoi eccellenti risultati in probabilità, teoria dei numeri, calcolo combinatorio e nello studio di particolari serie.

Questo tipo di analisi non è unico nel mondo della Matematica, anzi segue per così dire una tradizione per conoscere la quale rinviamo a D'Amore e Fandiño Pinilla (2020).

La narrazione dei metodi di Polya e la confessione pubblica di come egli abbia raggiunto i suoi risultati si sono trasformate, per alcuni lettori dell'epoca, in una specie di "metodologia generale della risoluzione dei problemi", una sorta di "euristica vincente" che, con considerazioni superficiali, è stata spacciata anche come modalità da usare in aula. Le "regole" interne e personali, che Polya enumera e descrive brillantemente e generosamente con esempi, sono state infatti ingenuamente considerate come una sorta di via maestra da seguire nel processo di insegnamento, certi che l'apprendimento sarebbe stata una logica conseguenza.

A quei tempi ancora non si parlava di Didattica della Matematica come disciplina, ancora non era stata creata; cominciò a farlo Guy Brousseau proprio dalla fine degli anni '60, lungo il corso della decade '70, culminando nella creazione di una vera e propria teoria dell'apprendimento matematico a metà degli anni '80.

Ora, che cosa volesse proporre ai suoi lettori Polya era ed è molto chiaro sulla base delle sue stesse parole: proporre sé stesso come modello, visto che si tratta di un modello vincente, e proporre le sue tappe come esempi che chiunque potrebbe seguire.

Oggi, mentre la storia di questi strumenti personali così efficaci nel caso di

Polya sono considerati di grande interesse storico e psicologico, nessuno più oserebbe considerarli scientificamente idonei per studi di Didattica della Matematica da utilizzare in aula, se non coloro che non hanno studiato o hanno mal studiato la Didattica della Matematica. Normalmente questi strumenti di Polya sono osannati o citati con favore da chi non sa che cosa è successo negli ultimi decenni grazie alla Didattica della Matematica e alla ricerca sviluppatasi al suo interno. A costo di ripeterci, dunque, ribadiamo che un’eventuale citazione di Polya da questo punto di vista è interessante dal punto di vista storico e forse psicologico, ma non certo dal punto di vista didattico, come mostreremo nei prossimi paragrafi.

Prima di affrontare questo argomento specifico, dobbiamo però presentare uno dei temi di ricerca che la disciplina Didattica della Matematica ha affrontato negli ultimi decenni.

2. Il fenomeno dello scivolamento metadidattico

L’uso nella prassi didattica di sistemi euristici eretti a modello che sostituiscono un apprendimento matematico con l’apprendimento di un’analogia il più possibile algoritmica e sequenziale rientra in un fenomeno negativo e controproducente evidenziato dalla ricerca seria in Didattica della Matematica che va sotto il nome di “scivolamento metadidattico”, assai diffuso e pericoloso, eppure talvolta perfino favorito da alcuni insegnanti.

Esso si dà quando si passa dallo studio di un tema matematico T, che dovrebbe costituire oggetto di apprendimento, allo studio degli strumenti che al più potrebbero servire o per illustrare il tema T o per affrontare la risoluzione di un problema relativo a quel tema T, come banale schema e non come reale apprendimento (il che dovrebbe comportare come conseguenza la risoluzione corretta, appropriata, generale di problemi concernenti quel tema T). Ma se lo scivolamento ha successo, lo studente impara a comportarsi per analogia nei casi previsti da T, non ad apprendere consapevolmente T. Lo studente apprende uno schema, un algoritmo, un esempio generalizzato, non il tema T. Spesso, poi, alcuni insegnanti (quando sono disinformati in Didattica della Matematica) confondono questi due livelli, accettano in buona fede la situazione che appare superficialmente come positiva, anzi loro stessi la creano e la propongono in aula, confortati dai suggerimenti di “esperti”, e dunque il gioco è fatto: tutti sono soddisfatti. Ma il tema matematico T resta per lo studente un mistero.

Per far capire bene la questione, suggeriamo alcuni esempi scelti fra i più diffusi.

1. Consideriamo problemi molto diffusi nelle scuole di tutto il mondo del tipo: *Tre operai fanno un certo lavoro in 9 ore; se gli operai al lavoro sono 6, quante ore occorreranno per fare lo stesso lavoro?* Si tratta una proporzione con un termine incognito, $a : b = c : d$.

Per capire e dunque risolvere consapevolmente questo tipo di problemi è stato ideato da tempo immemorabile un meccanismo grafico noto in tutto il mondo come "regola del 3". Tale modello trasforma la formulazione aritmetica in un grafico a frecce e questo sembra rendere più efficace la risoluzione del problema. Solo che, come è successo e succede in tutti i Paesi, dopo un po' non si parla più del problema e del tema proporzioni, ma del grafico. Apprendere a usare la regola del 3 sostituisce quello che era all'origine il vero oggetto dell'apprendimento: conoscere e saper usare l'oggetto matematico "proporzione". Lo studente impara a trattare e usare questo grafico (con frecce che hanno tra loro versi concordi e discordi) e, se anche gli riesce di trovare il risultato di quel problema proposto, non impara a risolvere il problema o problemi analoghi perché non ha imparato l'idea di proporzionalità. Ha solo azzeccato il modo giusto di mettere le frecce. Se dimentica la regola del 3 o se sbaglia a mettere le frecce, non sa più risolvere quel tipo di problemi: non ragiona più, cerca la regola, l'algoritmo. Tanto è vero che, se invece di modificare c si modifica d, lo studente non sa più che cosa fare.

2. Altro esempio funesto si è avuto con l'avvento nelle aule della teoria ingenua degli insiemi negli anni '70 e '80, per un'idea sovrastimata di alcuni matematici di un certo prestigio, in buona fede, ma che poco avevano a che fare con i problemi di insegnamento-apprendimento. Dopo qualche anno, si è inserito nel mondo della scuola il problema della rappresentazione degli oggetti della teoria degli insiemi e dunque si sono introdotti circoli o ellissi per indicarli; di lì a poco, si è smesso di studiare la teoria degli insiemi, e si è cominciato a teorizzare su come disegnare e usare i grafici, essendo questo diventato il tema. Per cui gli studenti che apprendevano qualcosa, non apprendevano la logica come linguaggio di base della matematica, il che era lo scopo iniziale, apprendevano a dominare i disegni dei grafici. Altro scivolamento metadidattico. Meno male che il pasticcio che è seguito a tutto ciò è servito a far fuori questo inutile contenuto matematico, anche grazie a interventi di altri matematici di identico prestigio (tutto ciò è narrato con particolari in D'Amore, 1999).

3. La scrittura posizionale dei numerali rappresenta una trappola mortale per gli aspetti cognitivi, soprattutto a causa dello scivolamento metadidattico. Se Natalia possiede 123 palline, nessuno mette in dubbio che ella disponga di 123 unità, dove ogni unità è una pallina. Dunque, nel numerale 123 ci sono 123 unità. Sembra ovvio. Ma se Natalia decide di raggruppare (per suoi scopi personali) le palline a dieci a dieci in scatolette, ella avrà 12 scatolette ciascuna contenente una decina di palline, più 3 palline sciolte. Dunque Natalia dispone di 12 decine e 3 unità; il che significa che continua pur sempre a disporre di 123 palline-unità. Ora Natalia decide (sempre per suoi scopi personali) di raggruppare le scatoline-decine in una scatola più grande, raccogliendo le decine a dieci a dieci; riuscirà a raccogliere solo 10 decine che

metterà in una scatola che ovviamente conterrà 100 palline, cioè 10 decine, cioè 1 centinaio. (Il nostro *sistema posizionale* di scrittura dei numeri si chiama *decimale* proprio perché si riunisce sempre a dieci a dieci per passare alle raccolte di livello superiore: unità→decine→centinaia→migliaia). Ma 2 di queste scatole-decine resteranno fuori dal contenitore grande. Dunque, a questo punto, Natalia dispone di 1 centinaio di palline, più 2 decine di palline, più 3 palline sciolte. Nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 123 palline, dunque 123 unità; nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 12 decine di palline più 3 palline sciolte. Si dovrebbe dire correttamente che nel numerale 123 le cifre 3, 2, 1 rappresentano i valori che appaiono nei “posti” unità, decine, centinaia del numerale 123: più precisamente 3 indica la cifra che appare nel posto delle unità, 2 indica la cifra che appare nel posto delle decine, 1 indica la cifra che appare nel posto delle centinaia. Sarebbe così semplice. Ma qui lo scivolamento metadidattico scatta quando si pretende di far dire allo studente che nel numerale 123 “ci sono”: 1 centinaio (il che è corretto, casualmente), 2 decine (che è falso perché le decine sono 12), 3 unità (che è falso perché le unità sono 123). Invece che dedicarsi allo studio dell’oggetto matematico “scrittura posizionale”, ora ci si occupa di questo scivolamento metadidattico e si pretende che gli studenti imparino a dire il falso. Per essere sicuri che l’errore avvenga nella totalità dei casi e che costituisca un pesante fardello, si assegnano colori alle cifre nei singoli posti: le unità vanno colorate in rosso, le decine di giallo, le centinaia di verde (stiamo inventando questo cromatismo errato e deleterio perché non sappiamo esattamente se ci sia già un accordo nazionale su questo punto infausto). E così, invece di spiegare il senso aritmetico corretto dell’oggetto matematico “scrittura posizionale”, si finisce con il passare a una scrittura cromatica che obbliga gli studenti a far uso di matite colorate quando scrivono i numeri, di fatto annullando circa 7000 anni di storia e ricerca. Il vantaggio della scrittura posizionale, una delle invenzioni più geniali dell’essere umano nella sua lunga storia, è proprio il fatto che la stessa cifra, a seconda della sua POSIZIONE, ha valore diverso; mentre qui si ribalta tutto in maniera vergognosa, e non si hanno più scritture posizionali ma CROMATICHE. Invece che dire: “sistema posizionale decimale” si dovrebbe dire “sistema cromatico decimale”. A volte l’insegnante si rifà all’abaco; ma sull’abaco, nella “scrittura” 123 non appaiono 123 dischetti-unità, ce ne sono in tutto solo 6, ma è la loro disposizione (1 nella colonna delle centinaia, la terza da sinistra; 2 su quella delle decine; 3 su quella delle unità) a dare il valore, non il colore. Dunque l’abaco, che viene eretto a modello, contraddice i risultati nefasti di questo scivolamento metadidattico. Se allo studente si chiede: *Quante decine ci sono nel numero 123?* molti docenti danno per corretta la risposta errata 2 invece che la corretta 12. Anche confortati dal fatto che la cifra 2 è stata scritta in giallo. Il che spiega i risultati assai più che negativi che si registrano nelle risposte delle prove Invalsi.

Non si deve ritenere che gli esempi di scivolamento metadidattico siano presenti solo nelle scuole primarie e secondarie di I grado. Ci limitiamo a proporre solo uno fra i molti esempi che si incontrano nella scuola secondaria di II grado.

4. La cosiddetta regola di Ruffini, ben famosa nei primi due anni di scuola secondaria di II grado. Lo studente sta studiando i polinomi e dovrebbe saper eseguire la facile divisione $(2x^3 - x^2 - 5x - 2) : (x - 2)$ il che lo dovrebbe portare al quoziente $2x^2 + 3x + 1$. Questo tema costituisce un ottimo argomento del sapere matematico. Ma nessuno gli insegna come fare a eseguire la divisione, peraltro semplicissima. Gli si insegna invece uno schema formato da tutti i coefficienti in gioco che vanno messi in una particolare tabella in un determinato ordine. L'apprendimento non è più quello relativo alla divisione fra polinomi, ma è diventato come sistemare i coefficienti in questa tabella e che uso farne. È questo meccanismo che sostituisce l'apprendimento, quel che libri e docenti si aspettano da lui, un evidente scivolamento metadidattico a causa del quale si perde un significativo sapere che sarebbe importante possedere.

Ci fermiamo qui, ma si potrebbe proseguire a lungo in ogni dominio della Matematica e a tutti i livelli scolastici.

3. Un esempio di metascivolamento metadidattico: l'euristica di Polya interpretata come metodo scolastico

Abbiamo identificato fenomeni di questo tipo come *scivolamento metadidattico* (dal francese *glissement metadidactique*) (Brousseau & D'Amore, 2018).

Questi fenomeni normalmente compaiono dopo una sconfitta, dopo un fallimento didattico, generalmente inevitabile, ma il fatto non viene immediatamente riconosciuto come fallimento mediante i mezzi che offre l'insegnamento tradizionale. Gli insegnanti spiegano, dopo di che spiegano le spiegazioni, poi le illustrano e poi spiegano le illustrazioni ... Ogni volta i tentativi di correggere i fallimenti iniziali sono inadeguati. Il fenomeno si amplifica sempre più e diventa rapidamente incontrollabile, come abbiamo visto negli esempi precedenti.

L' "euristica di Polya" e l'insegnamento dei suoi presunti "metodi" (di tipo pseudo-algoritmico) di problem solving sono un altro pericoloso esempio di scivolamento metadidattico che alcuni insegnanti non riescono nemmeno a riconoscere. Le difficoltà ben note che gli studenti incontrano nel risolvere i problemi generalmente lasciano spesso alcuni insegnanti disarmati. Lo studente possiede una "sua" conoscenza, e tuttavia non trova i mezzi per usarla al momento di dover risolvere i problemi che l'insegnante propone. Una classica risposta ingenua a livello primario è quella di spingere a risolvere problemi simili in modo tale che lo studente possa poi riprodurre la soluzione insegnata in un caso simile. E questo assomiglia a ciò che Polya propone nella sua euristica; ma senza colpa, non voleva proporre una metodologia didattica, voleva solo mostrare il suo modo di agire personale e suggerirlo a chiunque volesse copiare la sua modalità di ricerca.

Lo studente non ha ovviamente bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata o perché; è sufficiente che questa risposta sia conforme al modello previsto dal suo insegnante. Lo studente può quindi rispondere nell'ambito del contratto didattico senza nemmeno capire perché la sua soluzione sia corretta. Lo studente simula / adotta / usa / propone quindi una risoluzione che potrebbe anche non capire; l'insegnante la accetta e anzi la loda: è quanto basta a tutta la società.

In un modo più concreto, per guidare i suoi lettori, Polya espone consigli neo-cartesiani per l'organizzazione del lavoro di risoluzione dei problemi: comprendere l'affermazione, collegarla con la propria conoscenza, scomporla in fasi più semplici, ... Polya suggerisce di provare a fare dei passi ancora più euristici: cercare somiglianze, un esempio, un controesempio, generalizzare, confrontare, ... Questo lavoro introspettivo e generoso è servito a ingenui didatti come base per un infruttuoso tentativo di insegnare a risolvere i problemi la cui base sta nell'uso di queste euristiche.

È chiaramente uno scivolamento metadidattico: la risoluzione dei problemi (come attività matematica di grande interesse, forse la più genuina) è dimenticata, sostituita da uno studio delle procedure elementari (cartesiane, appunto) per raggiungere tali risoluzioni. Gli esempi forniti sono di natura tale da rassicurare e rendere gli studenti anche meno brillanti competitivi, ma è chiaro che la situazione è cambiata senza cambiare natura: lo studente cerca di applicare la sua euristica, così come ha cercato di applicare la sua conoscenza, e il successo non è per questo più assicurato, a meno che non vengano scelti problemi ad hoc, sulla base di accordi impliciti o espliciti nell'ambito del contratto didattico. Il che è quel che accade: sfilze di cosiddetti "problemi" (che in realtà sono esercizi) tutti identici. L'inganno didattico è fatale. L'unica differenza è che i saperi matematici significativi contengono in sé le loro stesse condizioni di validità, il che non accade nel caso delle euristiche che sono solo conoscenze e non saperi. Trattarli come saperi è un errore epistemologico e didattico.

Lo sforzo personale e generoso di Polya di proporre il suo proprio modo di fare come suggerimento euristico (che non aveva lo scopo di far smettere di imparare, anzi!) si è lentamente trasformato in un percorso pericoloso e controproducente. Il suo suggerimento metodologico resta un bell'esempio storico e personale, ma non è accettabile nel mondo della prassi didattica scolastica, oggi che abbiamo molto imparato dalla ricerca scientifica in Didattica della Matematica.

Comprendiamo che un errore o un fallimento portano la persona coinvolta, docente / studente, a trasferire la propria attenzione dall'attività in corso a uno dei mezzi di controllo o di conoscenza di questa stessa attività. Questo mezzo di controllo non è una vera conoscenza e ancor meno un sapere, è come se fosse una meta-conoscenza: non ho questa tal conoscenza, ma so quel che devo fare, quel che ci si aspetta da me, e dunque tendo a fare ciò.

Per esempio, per eseguire un'attività relativa a un tema di sapere S, colui che vi è impegnato A utilizza un mezzo M che si rileva insufficiente; per porre rimedio a ciò, A non sa di dover accedere a S per impadronirsene, rivolge invece la sua attenzione a M, ignorando S, cercando di migliorare M e trasformarlo in strumento idoneo. A è così entrato senza via di scampo nel processo che costituisce uno scivolamento metadidattico.

Tale scivolamento metadidattico consiste per il docente nel cambiare l'oggetto di insegnamento di un'attività o di una nozione, sostituendolo con uno dei suoi mezzi di controllo o di messa in evidenza. Questo scivolamento si produce, in particolare quando il mezzo è inappropriato o quando il sistema (allievo / docente) non può né abbandonarlo né respingerlo, dato che è stato imposto dal docente stesso o dalla prassi diffusa o dalla istituzione. È una forma di arrendersi al potere del contratto didattico, a qualcuno dei suoi deleteri effetti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020).

Come ulteriore conseguenza altamente negativa di questa ingenua interpretazione didattica dei suggerimenti di Polya, una ventina di anni fa si diffuse nel mondo occidentale la fallimentare idea di far precedere alla risoluzione di un problema di Matematica la realizzazione di quelli che vennero chiamati "diagrammi di flusso" (che erano poi dei diagrammi a blocchi) ispirati dal recente successo dell'informatica. In questo caso si è visto che per i bambini si rivelava assai più complessa questa stesura che non la risoluzione stessa del problema; il simbolismo schematico, che avrebbe dovuto aiutare, diventava l'oggetto stesso dell'apprendimento e dell'attività di risoluzione, il che costituisce uno "scivolamento metadidattico". Nelle nostre ricerche abbiamo dichiarazioni spontanee di bambini che ammettono di saper risolvere il problema ma di non saper costruire questo strumento (preteso dall'insegnante) il cui senso è per loro misterioso e che dovrebbe aiutarli. Fortunatamente, la violenta lotta dei didatti e il diffuso buon senso degli insegnanti hanno cominciato a far fuori questa infelice prassi che però ancora resiste.

Fra le deleterie e piuttosto deprimenti trasformazioni che l'idea geniale di Polya ha subito, c'è la più diffusa, almeno in Italia: una sequenza "assolutamente efficace" per risolvere qualsiasi tipo di problema; essa consta di una successione di norme concrete comportamentali quasi algoritmiche da seguire attentamente per non fallire:

- leggere attentamente più volte il testo del problema
- fare un circoletto colorato attorno ai dati del problema (che sono numeri)
- leggere più volte la domanda e poi sottolinearla con un colore diverso

- cercare nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (per esempio: "in tutto" vuol dire che devi usare l'addizione, "perde o regala" comporta la sottrazione)
- eseguire l'operazione fra i dati, trovare il risultato di tale operazione
- il risultato trovato è la risposta corretta al problema.

La cosa è talmente scorretta didatticamente da creare imbarazzo al solo pensiero che qualcuno l'abbia davvero così formulata e che circoli nelle nostre scuole; addirittura l'abbiamo vista scritta in grandi cartelloni a disposizione dei bambini in aula.

Il contratto didattico regna sovrano, sembra quasi che si voglia far sì che il bambino sia fallimentare in Matematica e che sappia risolvere solo problemi preconfezionati secondo un cliché stabilito a priori, un accordo preciso fra insegnante e allievi.

Potremmo ora fare infiniti controesempi a questa supposta strategia vincente perché ricavata dalle regole di Polya, ma ci sembrerebbe di offendere l'intelligenza del lettore nel ritenere che egli ne abbia bisogno. E comunque tutto ciò è già stato tema di altri nostri articoli, con esempi vari. Qui ci esimiamo dal farlo.

Può essere interessante per il lettore docente di Matematica di scuola primaria una breve riflessione sui rischi che corre un giovane risolutore di problemi, di fronte a proposte di attività sotto il condizionamento (più generale) del contratto didattico. Ci limiteremo a fare un solo esempio. Per altri esempi, si veda: D'Amore e Fandiño Pinilla (2019).

Il problema del pastore: *Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?*

Questo testo è già stato oggetto di varie analisi da parte nostra (a partire dal divulgativo D'Amore, 1993). Tutti sappiamo che la risposta corale non è quella corretta, auspicabile, del tipo: "Questo problema non ha senso, perché non c'è alcun legame fra la prima parte, la descrizione della situazione, e la seconda, la domanda" (naturalmente detta con parole dei bambini e non con questa frase da adulti), ma un assai più laconico "18". Se i bambini sono stati allenati a dare sempre comunque una risposta numerica a qualsiasi tipo di problema e se, peggio ancora, hanno seguito le "regole euristiche certamente vincenti" da noi descritte poche righe fa, allora non c'è scampo. La risposta sarà certamente sempre "18". (In aula, fuori dell'aula le cose vanno diversamente). Il bambino legge attentamente più volte il testo del problema, fa due circoletti rossi attorno ai due dati numerici del problema (12 e 6), legge più volte la domanda, la sottolinea in verde, cerca nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (nel nostro caso c'è, si tratta di quella congiunzione "e" che suggerisce un'addizione), esegue dunque l'addizione 12 + 6, trova la somma 18 che è, deve essere, non può che essere la risposta corretta al problema, dato che questa condotta euristica (come ha assicurato l'insegnante) è sempre vincente.

Se poi il testo è il seguente: *Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni in tutto ha il pastore?* allora i risultati sono, se possibile, ancora più avvilenti. Ma non occorre spiegare il perché.

Fra i tanti studiosi, soprattutto psicologi, che hanno lavorato nella direzione da noi delineata, quella cioè di fornire come modello comportamentale per la risoluzione di un problema da parte di un essere umano, anche di uno studente a scuola, soprattutto su temi matematici, una sequenza più o meno algoritmica, alcuni sono nomi di grande rilievo; ciò che li accomuna, pur nelle molte differenze, è stato il tentativo di trasformare per davvero le varie e complesse fasi che costituiscono tale risoluzione in una sequenza che ritenevano vincente.

Che gli studi sulle proposte analitiche di Polya siano ancora attuali, anche fra gli psicologi, è testimoniato dal lavoro di Carifio (2015); fra le caratteristiche specifiche delle proposte di Polya si sottolineano gli aspetti metacognitivi (pertinenza, prossimità e qualità) che emergono grazie alle attività di mobilitazione, organizzazione, isolamento. Tutto ciò produce sia emozioni positive che negative, ma entrambe sono basi per la risoluzione dei problemi di matematica (difficili, asserisce l'autore).

Nel suo citatissimo lavoro (Schoenfeld, 1992), Alan Schoenfeld presenta una sua personale interpretazione del lavoro di Polya sia dal punto di vista della ricerca matematica, nel quale si evidenza la tendenza a fare del problem solving il focus stesso della matematica, sia dal punto di vista dell'educazione matematica. Schoenfeld parla di "arte del problem solving", anche proponendo una storia di questo atteggiamento.

Alla base della proposta euristica di Polya c'è l'idea che la matematica deve essere considerata come un'attività, più che un processo di deduzione logica, formale; nelle parole di Schoenfeld, Polya ha sostenuto più volte che la matematica è simile alle scienze fisiche il che comporta una forte componente induttiva e di scoperta, assai lontana dalle concezioni formali di molti matematici dell'epoca. Inoltre, per Polya, l'epistemologia matematica e la pedagogia matematica (così viene denominata da Schoenfeld) sono profondamente intrecciate. Se la matematica ha tali connotazioni, anche nelle scuole esse vanno incoraggiate e le conseguenti attività degli studenti devono rispondere a questo modo di vedere. Inoltre, la matematica va concepita come un atto di senso, socialmente costruito e trasmesso socialmente.

Negli anni '80 si è avuto il trionfo di questo modo di pensare, ma, afferma Schoenfeld, una letteratura critica superficiale ha spesso banalizzato lo spirito del lavoro di Polya che, infatti, nella sua opera si rivolge spesso a "persone con raffinatezza matematica" e non a principianti della matematica.

Schoenfeld asserisce che le caratterizzazioni euristiche da parte di Polya a proposito della risoluzione dei problemi erano "descrittive piuttosto che prescrittive”. Ben altro, dunque, rispetto alla creazione di comportamenti standard proposti in modo banale, come abbiamo più volte detto sopra. Per esempio, prendiamo in esame anche solo il considerare le caratterizzazioni che passo passo servono a riconoscere le strategie quando sono state utilizzate in casi precedenti; prove fatte mostrano che le persone coinvolte in prove non avevano affatto familiarità con le strategie precedenti già usate per poterle riusare. Altro punto critico si è rivelato una fase apparentemente semplice come l’esaminare casi speciali all’interno di un processo o riconoscere casi analoghi. Tutto ciò può essere semplice per un professionista della matematica, ma non esserlo affatto per un principiante, come uno studente.

4. Conclusione

Conoscenze e saperi formano una coppia di metaconoscenza con mutue influenze reciproche. Le conoscenze sono i mezzi impliciti per attivare e gestire i saperi. I saperi sono gli strumenti istituzionali e culturali per apprendere le conoscenze, le proprie e quelle altrui. Volerli trattare allo stesso modo, in particolare concepire le conoscenze solo come saperi, costituisce scivolamenti metadidattici permanenti. Ogni conoscenza implicita in un sapere richiede, per funzionare, nuove conoscenze che, una volta fissate, non possono più svolgere il loro ruolo. Ne risultano errori, malintesi, insuccessi che rilanciano richieste impossibili e pratiche inefficaci. In una visione economica, le conoscenze disponibili in aula sono il capitale e gli interessi sono i saperi acquisiti. L’insegnante professionista critico e consapevole deve distinguere ciò che dovrebbe essere detto da ciò che non deve essere detto. Questa arte umana esiste da milioni di anni; ciò implica il gioco sottile e incerto delle conoscenze vive, dubbiose e fugaci con i saperi sicuri e condivisi, il gioco del detto e del non detto.

Prima di pretendere di “migliorarlo” con misure sommarie e drastiche, è meglio quanto meno studiarlo con umiltà.

Riferimenti bibliografici

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Prefazione di Bruno D’Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & D’Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica: De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41–54.

Carifio, J (2015). Updating, modernizing, and testing Polya’s theory of [mathematical] problem solving in terms of current cognitive, affective, and information processing theories of learning, emotions, and complex performances. *Journal of Education and Human Development*, *4*(3), 105–117.

D'Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *47*(2), 14–17.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B. (2020). *Los problemas de matemática en la práctica didáctica*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161–196.

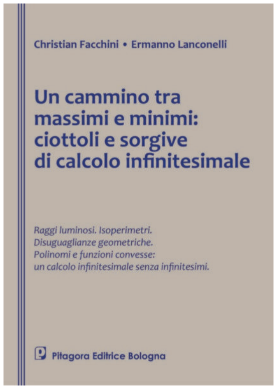
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Sugli scivolamenti metadidattici: Alcuni esempi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *43A*(2), 108–136.

Pólya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: Logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. (Lavoro originale pubblicato nel 1945).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. *Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York, NY: MacMillan.

RECENSIONI E PREFAZIONI



Facchini, C., & Lanconelli, E. (2021). *Un cammino tra massimi e minimi: ciottoli e sorgive di calcolo infinitesimale*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Il *contenuto* di questo denso e piacevole libro è laconicamente ma chiaramente descritto in copertina:

> Raggi luminosi. Isoperimetri.
> Disuguaglianze geometriche.
> Polinomi e funzioni convesse:
> un calcolo infinitesimale senza infinitesimi.

La frase finale sembra uno scherzo, ma vedremo che non è così, è proprio la verità…

Il *modo* nel quale si presenta questo volume è ben descritto nel titolo, che potrebbe lasciare perplessi: "ciottoli e sorgive". Visto che si tratta di un "cammino", ipotizziamo che esso avvenga non su una strada lastricata ma lungo un sentiero nel bosco. Il viandante vi incontra dunque "ciottoli" che possono essere anche interpretati come asperità; e "sorgive" cioè piccoli affioramenti di acque sotterranee, minuscole sorgenti, come capita appunto nei viottoli nei boschi, specie se di montagna …

La metafora si svela da sé, non appena ci si inoltra nel viottolo, pardon, nella lettura …

Sorprende piacevolmente il rinvio colto e raffinato continuo, fra risultati matematici del recente passato e informazioni storiche sulla base delle quali tali risultati sono fondati; man mano che si procede si ha la bella meraviglia, la piacevole sorpresa, la culturalmente ghiotta occasione di un'allusione continua a risultati di base, anche del passato antico, fino alla cultura matematica attesa, quella di base dei tempi nostri. L'indice del libro, cioè il sunto dei contenuti, è presto fatto.

- Medie geometriche, medie aritmetiche, come base dei problemi isoperimetrici (e qui si trova di tutto, come base appunto, perfino la famosa dimostrazione del presidente USA Garfield del teorema di Pitagora e il teorema di Erone, una bella passeggiata storica avvincente).
- Medie in due variabili e disuguaglianze classiche significative, e ancora Erone.
- Proprietà classiche isoperimetriche dei poligoni regolari, con spunti storici basati sui lavori di Zenodoro, Brahamagupta e Bretschneider.
- Continuità e completezza, con ovvie citazioni di Dedekind.
- Analisi infinitesimale algebrica delle funzioni polinomiali, con richiami a Ruffini, Rolle e Weierstrass.

- Funzioni convesse e analisi infinitesimale geometrica. Attraente in particolare il paragrafo sui minimi delle funzioni convesse, con un riferimento a metodi che richiamano Fermat.
- Medie in più variabili, presentazione della disuguaglianza di Young.
- Studio delle riflessioni che chiama in causa specchi di diverse forme geometriche, ma anche sulla rifrazione, nella quale si cita la legge di Snell e, a mo' di esercizio, la proposta del famoso "problema del bagnino" lanciato da Feynman.

Ce n'è per tutti, con estrema attenzione ai dettagli, con mille figure che illustrano ogni minimo passaggio, alcune anche a colori.

L'attenzione per così dire didattica è formidabile, colta, profonda, generosa, attenta; il processo esplicativo non lascia nulla al caso o alla sola intuizione: il lettore è accompagnato in questo "cammino" (non dimentichiamo la metafora) passo dopo passo, da due esperte guide alpine … Un altro grande aiuto didattico è costituito dal sempre presente paragrafo che chiude ciascun capitolo, dedicato alla proposta, formulazione e risoluzione di esempi (mai banali) dei contenuti appena trattati.

Ma, finalmente: che cosa significava quella strana frase scorta in copertina: "un calcolo infinitesimale senza infinitesimi"?

Prima di rispondere, riteniamo necessaria una breve premessa.

Proprio recentemente noi prefattori abbiamo scritto in un articolo e sostenuto in conferenze che uno dei concetti più diabolicamente complicati della matematica è quello di limite. Lo studente impara a memoria la sua definizione, la ripete anche bene al proprio docente che gliela chiede, ma … capirla è altra cosa. Con esempi tratti dalla ricerca didattica in aula, illustravamo che si tratta di uno dei concetti più sottilmente complessi dell'intero edificio matematico e arrivavamo ad affermare che riteniamo che la quasi totalità degli studenti non riesce a farsi una costruzione cognitiva significativamente corretta di quell'oggetto matematico misterioso.

E allora, che dire della bella sorpresa nel vedersi scritto dai nostri due autori, Christian ed Ermanno, che essi sono stati condotti "a sviluppare un calcolo infinitesimale per le funzioni polinomiali e per le funzioni convesse che ha il pregio di non richiedere l'uso degli infinitesimi; precisamente un calcolo differenziale che non esige la complessa nozione di limite, ma soltanto la proprietà di continuità della retta reale". Sembra un sogno: ma allora siamo sulla stessa linea didattica! Ne siamo felici.

Ma chi è il destinatario di questo testo?

Secondo noi è un libro piacevole e dotto che, proprio per le particolarità e le peculiarità dette finora, può essere letto da tutti i curiosi, basta che possiedano le competenze di base espresse sopra. E poi, in particolare, lo raccomandiamo a quei docenti che si preparano a tenere corsi su questi temi; agli studenti universitari che debbano affrontare questi temi e che vogliano vederne tutti gli aspetti, anche i più elementari. Lo vediamo bene anche come libro di collegamento fra scuola secondaria di II grado e facoltà scientifiche universitarie; in molti altri testi abbiamo visto questi temi accennati o trattati quasi con sufficienza; qui se ne vede bene il senso, la base, lo sviluppo storico, matematico ma anche didattico. Gli autori accompagnano il lettore passo dopo passo, sembra quasi che lo vogliano convincere.

Un libro avvincente, dunque, che raccomandiamo con entusiasmo.

Marrone, C., & Venger A. M. (2021). *La tradizione dei Maestri costruttori. Quaderno 1. La lapide tombale di Hugues Libergier*. S. Demetrio Corone (CS): Irfan Edizioni.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nel corso del XIII secolo venne costruita dall'architetto Hugues Libergier (1229 – 1263) a Reims la chiesa abbaziale benedettina di Saint-Nicase; ma poi, durante la Rivoluzione francese, esattamente nel 1794, essa fu venduta come cava di pietre e materiale edilizio vario … Delle meraviglie che certo conteneva si salvò ben poco, di certo la lastra tombale dello stesso architetto che l'aveva costruita. Questo prezioso documento storico-artistico fu traslato ed è ora conservato nella cattedrale di Notre Dame della stessa città.

La pietra tombale in questione è di forma rettangolare, ricca di incisioni colmate con piombo fuso; esse rappresentano colonnine che sorreggono un arco, sulla cima del quale appare una ghimberga, cioè un frontone appuntito; l'immagine dello stesso architetto che mostra in una mano il modello di una chiesa e nell'altra un tipico strumento di misura dell'epoca, una pertica; ai suoi piedi appaiono un compasso e una squadra. Tutt'attorno vi sono numerose lettere che costituiscono un'epigrafe disposta a mo' di rettangolo lungo il contorno della pietra stessa.

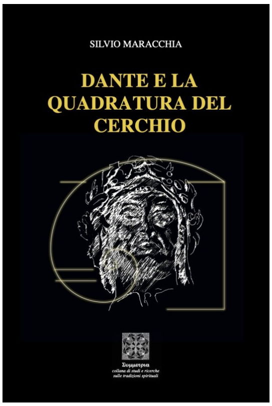
Seguendo una tradizione plurisecolare ben nota, ma della quale tecnicamente e storicamente noi sapevano ben poco, le due autrici di questo libro hanno analizzato in tutti i suoi dettagli matematici, soprattutto geometrici, ma anche aritmetici, ogni elemento di questa raffigurazione tombale, arrivando a mostrare sottili relazioni, mille sottigliezze semiotiche, moltissimi riferimenti aventi a che fare con misure di lunghezze, ampiezze di angoli, relazioni numeriche la cui base è spesso filosofica, relazioni che chiamano in causa armonie geometriche e aritmetiche, per esempio legate alla ricorrenza o alla citazione implicita di vari teoremi di geometri classici, la successione di Fibonacci, relazioni armoniche basate per esempio sul numero aureo di Fidia. E mille ancora.

Nulla di quanto appare rappresentato su questa pietra sembra essere casuale: ogni relazione, ogni dato, ogni riferimento si mostra oggi, grazie a questa precisa analisi; ogni segmento ha inclinazione, lunghezza, intersezioni che rimandano a interpretazioni intrinseche; ogni poligono ha una sua funzione, che sia un triangolo rettangolo, equilatero o altro; successioni di poligoni regolari si evidenziano in modo chiarissimo, dopo la dettagliata e illuminante analisi delle autrici, il che sarebbe stato impossibile a un osservatore, per quanto attento e acuto, se non ci fosse stato uno studio dotto, esplicito, organizzato, attento da parte di due esperte specifiche. Ogni circonferenza ha una sua funzione significativa. Grazie ad aritmetica e geometria così svelate, si giunge a dare un senso a quelle lettere che costituiscono la cornice, come abbiamo detto; la quale assume significati assai celati, che solo questo tipo di indagine permette di cogliere. E poi ci sono i labirinti, con il loro fascino plurisecolare, che hanno funzioni mistiche assai significative. E tanto altro.

Sorprende il fatto che le due autrici citino decine e decine di matematici classici, soprattutto greci e arabi, dando prova di una competenza inattesa, ma necessaria, visto che la ragione, il fondamento, la base di questi calcoli hanno secoli di tradizione, cosa che due matematici, per quanto appassionati di storia, non potevano supporre.

Ansiosi come siamo sempre di mostrare concretamente a tutti coloro che mettono in dubbio l'importanza e la presenza della matematica in ogni dove (il nostro proposito è di mostrare che *la matematica è dappertutto*), troviamo in questo studio un esempio non proprio del tutto inatteso, ma certo non immaginabile a priori, così matematicamente ricco.

Maracchia, S. (2022). *Dante e la quadratura del cerchio*. Roma: Simmetria Edizioni.



Recensione di Bruno d'Amore

Il titolo di questo breve lavoro di Silvio fa riferimento solo a uno dei diversi temi trattati; in realtà nel libro si affrontano molteplici sfaccettature di quelle che possiamo descrivere come le citazioni matematiche nell'opera complessiva di Dante.

Molti sono di fatto gli argomenti proposti, di carattere aritmetico, geometrico, logico, coinvolgenti tutta l'opera di Dante, non solo la *Comedìa*, anche il

Convivio, la *Monarchia*, la *Questio de aqua et terris*.

Alcune sono fra le più note, quelle alle quali molti di noi autori di questo specifico settore facciamo sempre riferimento, trattate con l'acume usuale cui Silvio ci ha abituato nelle sue opere; altre sono più sottili, di stampo filosofico o, meglio, epistemologico. Sulle quali torneremo.

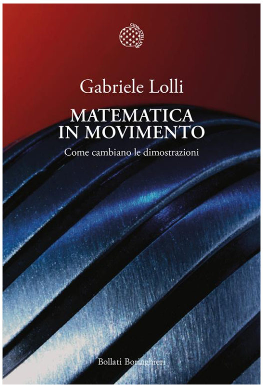
Uno dei temi che appassionano coloro che vogliono analizzare le citazioni matematiche di Dante è quello relativo alla sua formazione matematica: come si è costruita, su quali testi, di quali autori. Per esempio, Dante aveva letto davvero l'opera di Fibonacci? Davvero aveva almeno sentito parlare di quella di Archimede, dato che non poteva averla conosciuta direttamente? Fino a che punto si era spinto nell'esaminare Euclide? E la logica? Che logica conosceva? Com'è possibile che più d'uno tra noi voglia vedere suoi riferimenti al teorema cosiddetto dello Pseudo Scoto (attribuito da alcuni decenni a Giovanni di Cornovaglia)? Come distingueva il modo di creare la matematica, in particolare la geometria di Euclide e dei grandi matematici greci, rispetto al modo di trattarne di Aristotele? Avendo dedicato diversi decenni a questi studi, so che tale problematica non si risolverà, forse mai; ma trovo corretto che ogni autore-studioso che se ne occupi faccia proposte personali, documentate con quanto è disponibile oggi, grazie agli studi sempre più critici, profondi, analitici che rapidamente si susseguono. E questo di Silvio è un bell'esempio di come procedere, con cautela ma anche con coraggio, soprattutto quando si possono citare fonti o riferimenti a difesa del proprio modo di concepire, delle proprie intuizioni.

Trovo affascinante il tentativo di proporre al lettore un Dante epistemologo moderno, dunque non costretto dal fascino aristotelico a difendere la dimostrazione in matematica (in particolare in geometria) soggetta alla prassi greca che vede nel sillogismo il trionfo del "se allora". La moderna logica, oramai quasi cent'anni dopo Gödel, è diversa assai e poca fede riserva alle caratteristiche che dominavano la cultura matematica greca classica e ancora quella medioevale. Oggi le cose sono evolute o, almeno, modificate; e, come scrivono molti altri autori a questo proposito, la logica ha cambiato aspetto, scopo, attenzione, volgendosi più alla metamatematica che alla logica in sé. "Una scienza organizzata come sistema ipotetico-deduttivo non sarebbe in grado di autogiustificarsi", scrive Silvio a pagina 61.

Questo è, a mio avviso, il tema centrale e forse il più interessante di questo libro; e costituisce la spiegazione del capitolo finale, nel quale il nostro Autore racconta di un sogno suggestivo e rivelatore avvenuto in "un giardino costituito di aree ben curate colme di fiori", nel quale incontra personalmente Dante, che lo riconosce e che dimostra di aver letto le sue opere. E Dante, appunto, si rivela per come Silvio vuole che sia, un creatore che crede alla matematica come "costruzione dello spirito umano, fatta di relazioni, di simmetria e, soprattutto, di infinito e non dipendente dalle cosiddette dimostrazioni", le quali "offuscano lo spirito matematico" essendo "un peso inutile per chi giunge agli stessi risultati per intuizione, per illuminazione, per magia quasi".

Il sogno di Silvio è rivelatore. Non so se corretto fino in fondo per un personaggio del Medioevo, ma certo affascinante.

Lolli, G. (2022). *Matematica in movimento. Come cambiano le dimostrazioni*. Torino: Bollati Boringhieri.



Recensione di Bruno D'Amore

Perfino fra le persone che si autoreputano colte in matematica c'è talvolta (anzi: spesso) la diffusa convinzione che la nostra disciplina sia una specie di sacrario storicizzato perenne, senza mutamenti; che i paladini dei contenuti e delle modalità creative siano quelli eterni, fissi, che la storia ha consacrato, Pitagora, Euclide, Archimede; che una dimostrazione resta immutabile nei secoli, nei millenni; che la coerenza e il rigore siano essi stessi perenni e non soggetti a modifiche.

Ricordo ancora che, tentando di mettere in discussione tutto ciò in un mio articoletto del 1990, ebbi fior di contestazioni e dissidi: il rigore è eterno, mi si ribatteva, le modalità di creazione della matematica sono perenni, uniche ...

Ma non è così. La matematica di oggi è assai diversa, nei temi, nei modi, nel linguaggio, nelle pretese di quel cosiddetto rigore, nelle modalità di esposizione e di dimostrazione da quella anche solo di 100 anni fa, tanto per fare riferimento esattamente a quel periodo durante il quale questo tipo di discussione (peraltro sempre esistita) si faceva violenta, evidente, esasperata. Nascevano epistemologie, logiche, definizioni, strumenti matematici, convinzioni matematiche, idee che stavano scuotendo con veemenza ogni esasperata velleità fondazionale supposta unica, immutabile.

In particolare, quel che colpisce di più, è la modalità dimostrativa. Come tutti i lettori ben sanno, si sono avvicendate, nel corso dei secoli, modalità dimostrative tra loro assai diverse. E il processo segue, inarrestabile, sempre più rapido.

Se è vero, come è vero, quel che scrive l'Autore, Gabriele Lolli, che a scuola l'attività dimostrativa continua a essere insegnata come fondata, basata, asserita su principi che datano millenni e che vengono ritenuti e dunque proposti culturalmente come perenni e universali, unici, è anche vero invece che le modalità dimostrative sono varie, alcune tra loro radicalmente diverse. È certo il fatto che taluni disdegnano, disapprovano, ridicolizzano le modalità diverse dalle proprie, quelle sulle quali si è formato, ma è altrettanto vero che ci sono forme nuove, affascinanti, sorprendenti che si sono affermate, altre che sono in fase di farlo, ma che già s'avvertono.

Ecco, nelle precedenti linee ho cercato di riassumere in poche battute uno dei contenuti di questo affascinate libro, denso di notizie storiche, logiche, epistemologiche, un libro attraente che è necessario leggere e meditare, sia se si è matematici (soprattutto se si ritiene che il proprio modo di dimostrare sia "il" corretto, unico, indiscutibile), sia se si è docenti di matematica di scuola, per allargare il repertorio delle modalità di strade possibili, almeno quello personale, giungendo ad accettare con apertura mentale dimostrazioni meno formali, anche da parte degli studenti, e non solo ripetizioni apprese a memoria che hanno significato solo per un adulto.

Ma non c'è solo questo, nel libro di Lolli. Vi si parla di storia, di logica, in modo molto profondo, di assiomatiche, della contrapposizione mai abbastanza discussa e analizzata fra Hilbert e Bourbaki, di che cosa vuol dire davvero assioma, di come ci siano state nella matematica rivoluzioni sofisticate e devastanti, talvolta occorse senza che tutti se ne rendessero conto. Questo libro parla di un tema affascinante, tecnico, unico, la "bellezza della matematica", che cosa significa davvero questo sostantivo semanticamente così vario. Un capitolo tremendamente interessante è l'undicesimo, nel quale si inizia commentando il famoso testo di Eugene Wigner del 1960 dedicato alla cosiddetta "irragionevole efficacia della matematica", che tutti abbiamo letto, ma non sempre compreso in profondità. (Invito tutti coloro che si ritrovano descritti dalla precedente frase a leggere tale capitolo).

E poi… e poi! Che cosa sarà la dimostrazione in futuro? Chi ricorda quando, nel 1977, apparve la "dimostrazione" di Kenneth Appel e Wolfang Haken relativa alla congettura-teorema dei 4 colori? Ho messo "dimostrazione" fra virgolette perché in quella occasione si accese un dibattito tremendo proprio sulla modalità (da pochi ritenuta accettabile) delle dimostrazioni affidate a macchine, in grado di effettuare operazioni di stima, di comparazione e di sintesi impossibili per un essere umano. Credo che tutti noi partecipammo a quel dibattito epistemologico, forse mai sopito. Ma ora ci siamo. Non soltanto questo tipo di dimostrazioni sono accettate dai più, ma sono sempre più comuni e potenti.

Un intero scaffale della mia vasta biblioteca personale contiene solo libri di Gabriele Lolli, molti dei quali da me recensiti negli anni, alcuni dei quali riletti, tutti apprezzati; ma questo, questo è una vera e propria bomba!, ricco com'è di citazioni, di esempi, di approfondite spiegazioni. Lo suggerisco subito, appena finito di leggere, confessando che lo rivedrò daccapo nelle prossime settimane, quaderno e matita a portata di mano, per prendere preziosi appunti.

Cavalli Sforza, L. (2019). *L'evoluzione della cultura*. Torino: Codice.

Recensione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

Sopraffatti dagli eventi avvenuti fra il 2019 e il 2021, questo libro ci era sfuggito; e solo nel 2022, ne veniamo a conoscenza, decidendo non solo di leggerlo (attratti come siamo dal tema del testo e dalla fama dell'autore) ma anche di recensirlo. Anche perché si tratta di un'edizione ampiamente rinnovata, rispetto a quella originale, ben nota, del 2004.

Quando si parla di "evoluzione", sempre (o, meglio, assai spesso) ci si riferisce alla biologia, alla genetica, all'antropologia; ma Cavalli Sforza pone in parallelo l'evoluzione in senso biologico con quella culturale, arrivando a dichiarare che c'è una profonda analogia, appunto, fra evoluzione in senso biologico e quella in senso culturale.

Ciò comporta delle conseguenze fantastiche, di grande impatto scientifico (com'è nel nostro caso di lettori avidi) ma anche sociale.

Fino agli ultimi anni di tutto il precedente millennio, non si possono annoverare veri e propri studi seri per capire i meccanismi dell'evoluzione culturale; il che ha fatto sì che certi fenomeni siano risultati inspiegati, per esempio perché alcuni aspetti culturali risultano stabili mentre altri sono in continuo ampliamento. La spiegazione adottata da alcuni, poco dotta, non basata su vera ricerca, è che le differenze di comportamento osservate in nazioni o in culture tra loro diverse fossero legate a differenze dovute a una risposta che chiama in causa una supposta eredità biologica. Questo modo di pensare e di dedurre ha portato al razzismo più bieco che ancora negli ignoranti domina. Secondo questo vecchio ed erroneo modo di pensare, le differenze di sviluppo economico o di successo politico o di successo militare sono causate da differenze innate, immutabili, che hanno fondamento in supposte basi biologiche della supremazia. Queste spiegazioni scientificamente infondate e sbagliate sono dovute all'ignoranza e a informazioni sommarie e superficiali.

La crescita demografica è recentissima, rispetto alla storia dell'essere umano; la tribù che, partendo dall'Africa, si è spinta nei millenni fino a colonizzare il mondo (ovviamente cambiando gli individui nel corso del tempo) non contava se non centinaia di componenti, certo non più di un migliaio. Lo sviluppo demografico vero è iniziato quando l'essere umano ha cessato di essere un puro raccoglitore o un cacciatore, e si è dedicato all'agricoltura e all'allevamento, dunque non più di 10.000 anni fa. A quel punto, le popolazioni dominanti, tali in quanto avevano avuto accesso a nuove forme più idonee e comode per soddisfare i propri bisogni primari, avendo necessità di un linguaggio sempre più complesso ed evoluto, hanno cominciato a costituire gruppi di molte migliaia di individui, con lingua condivisa sempre più ampia e significativa e aspettative comuni. Questo immenso aumento del numero di individui e le dimensioni dei diversi gruppi sociali, anche in relazione alle complessità sempre più sottili delle relazioni, hanno contribuito a creare una rigida stratificazione socioeconomica, classi, caste, strati sociali, imponendo come idea giustificatrice una supposta superiorità o inferiorità biologica.

Ma la stessa genetica che si occupa delle popolazioni in sé e delle relazioni fra loro, aveva già messo in crisi questo modo di pensare.

L'idea base del razzismo è minata alla sua origine da successivi studi scientifici seri, di carattere culturale; e gli esempi che fa il nostro Autore, in grande misura basati sulle proprie ricerche, condotte in varie regioni del mondo, sono significative, molto attraenti, sottili ma anche evidenti, dato che sono condotte con perfetto rigore.

Gran parte del testo è dedicata allo studio scientifico dei fenomeni culturali; siamo di fronte a un trattato davvero profondo nel quale si formulano ipotesi basate su prove inconfutabili, relative al problema di comprendere e spiegare i fenomeni culturali e la loro evoluzione. Piacevolissimo e preciso il continuo riferimento a teorie scientifiche universalmente riconosciute come tali, per spiegare i fenomeni evolutivi della cultura.

Abbiamo imparato tante cose, spesso sorprendenti, leggendo con avidità crescente questo libro. Per esempio che 60.000 anni fa l'intera popolazione umana mondiale non raggiungeva i 60.000 individui; che l'espansione cosiddetta *out of Africa* è iniziata solo 60.000 anni fa; che Eurasia prima e Americhe poi sono state esplorate, percorse e "conquistate" da queste popolazioni originarie alla velocità di circa mezzo chilometro l'anno; che in medio oriente l'espansione è iniziata solo 11.000 anni fa, nel sud est asiatico e in Messico solo 9.000 anni fa; interessante la vicenda umana nella regione del Sahara, dato che la desertificazione attuale, iniziata fra 5.000 e 4.000 anni fa, ha respinto i suoi abitanti (coltivatori e allevatori) verso il sud comportando deforestazione di immense regioni per farne uso agricolo e pastorale.

Affascinanti sono le narrazioni dell'Autore a proposito delle sue ricerche scientifiche empiriche personali; fra tutte spicca quella con i pigmei africani, soprattutto per le sorprendenti relazioni fra convinzioni appartenenti a questo gruppo sociale e quelli circostanti; il paragone iniziale fra evoluzione biologica e culturale è chiarissimo e inatteso. Interessantissimi i racconti relativi alla trasmissione delle esperienze vincenti (per esempio mediche) da una società all'altra, nonostante forti differenze di carattere sociale. Uno dei temi di questo libro riguarda che cosa significa trasmissione culturale, formazione di convinzioni e modelli, l'idea di famiglia, monogamia e poligamia, sessualità, religione, resistenza nel tempo di nicchie sociali e culturali, come classificare o riconoscere elementi e significati terminologici quali altruismo, curiosità, valutazione della criminalità.

Risulta peraltro da questo studio che i cambiamenti culturali sono determinati dalle nostre scelte e dalle nostre decisioni; ma essi comportano cambiamenti demografici e hanno addirittura conseguenze nella selezione naturale; c'è dunque una forte relazione fra selezione naturale e scelte, sociali e personali.

Genetica e cultura sono strettamente legate, connesse, non sono la prima imperscrutabile e non modificabile e la seconda espressione di intelligenza o sensibilità; razionalità o irrazionalità, credenza nelle scienze o nell'immanenza spirituale (religiosa o credenza pseudoscientifica) non sono casuali o legate al livello sociale, sono parti ibride dello stesso complesso processo.

Fantasia, immaginazione, razionalità, dunque cosiddette arti e cosiddette scienze, sono i risultati della selezione culturale, legata a quella genetica, allo scambio, alla relazione fra gruppi umani.

Incantevole e sorprendente il paragrafo finale, dedicato al tema della felicità, relativamente raro e sporadico nelle trattazioni scientifiche. La indubitabile maggior comodità della vita attuale rispetto a quella anche solo del recente passato sembra comportare un aumento di felicità dell'essere umano; ma: intanto noi, che viviamo questo modello condiviso del mondo (anche se non tutti condividiamo le stesse idee e le stesse valutazioni) non è detto che siamo in assoluto più felici dei nostri nonni, proprio perché le comodità-conquiste negli ultimi anni sono facilmente e rapidamente diventate ovvie pretese; e poi perché tendiamo a dimenticare che vi sono gruppi sociali a volte vastissimi dei quali ignoriamo necessità, idee, bisogni, esseri umani che hanno modelli sociali del tutto diversi dai nostri.

Quel che ci ha colpito di più di questo lavoro è non solo la quantità straordinaria di informazioni che ne abbiamo tratto e delle quali stiamo facendo tesoro, per riflessioni profonde, ma la logica ferrea spietata della sua forza esplicativa. Tipica dello scienziato che narra.

D’Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora.

Recensione di Miglena Asenova, Maura Iori e George Santi

Un libro di memorie ha di per sé qualcosa di malinconico, narra avvenimenti passati che l’autore ha deliberatamente collocato nelle terre dei ricordi, più o meno lontani, intensi, importanti; irrimediabilmente conclusi, ma impressi nel cuore, rivissuti nel presente e proiettati nel futuro. Ma quando il lettore curioso apre questo libro e inizia a leggere … viene catapultato nel centro di una narrazione gioiosa, vivace, appassionata, intensa e avvincente, i cui personaggi hanno fatto la storia della didattica della matematica a partire dai suoi più lontani esordi. Strada facendo si incontrano Efraim Fischbein, Gerard Vergnaud, Hermann Maier, Georges Papy, Zoltan Dienes, Guy Brousseau, Ubiratan D’Ambrosio, Athana(s)sios Gagatsis, Luis Rico, Juan Godino, Vicenç Font, Salvador Llinares, Ricardo Cantoral, Carlos Vasco, Luis Carlos Arboleda, Raymond Duval, Luis Radford, solo per elencare alcuni dei personaggi che per la maggior parte dei giovani ricercatori sono figure quasi leggendarie, ma che per il nostro autore sono invece “esseri umani tangibili, veri, reali, compagni di formidabili avventure intellettuali, talvolta intensi avversari tematici, talaltra fantastici alleati dialettici”. E quindi la narrazione delle memorie personali si trasforma nella narrazione della storia di una disciplina, dalla sua nascita ai giorni più recenti, attraverso un intreccio affascinante di ritratti di persone, narrazioni di eventi, riflessioni personali e metariflessioni illuminanti. Così più che sentirsi lettore di un libro di memorie o spettatore di una conferenza dotta, ci si sente un commensale a una tavola conviviale, dove il maestro condivide episodi ed eventi vissuti in prima persona con i suoi allievi, conducendoli in una navigazione che tocca molte terre, sulle quali egli ha lasciato le sue impronte indelebili: prima di tutte, quella della didattica della matematica, ma accanto a essa anche terre meno frequentate da parte degli studiosi di questa disciplina, almeno non in veste di esperti: l’arte figurativa, la narrativa, lo sport agonistico e naturalmente la matematica, compresa la sua storia e la sua divulgazione. Quelle “terre straniere” si trasformano quindi in universi paralleli in cui il protagonista incontra guide d’eccezione che lo conducono e accompagnano alla scoperta di mondi all’apparenza privi di contatto tra loro, ma che sono tutti intimamente connessi nella narrazione di queste memorie, tutti necessari per ricostruire la poliedrica personalità e la ricchezza della vita personale e professionale del nostro autore.

In una narrazione in cui le trame sono fortemente intrecciate il percorso non è mai lineare, ma se proprio volessimo introdurre il lettore nel contesto iniziale della narrazione, dovremmo trasportarci indietro nel tempo fino agli inizi degli anni ’70 del secolo scorso: il nostro protagonista si è laureato da poco in matematica e si accinge a diventare “matematico di professione”, accedendo all’incarico di assistente presso l’Istituto di Geometria dell’Università di Bologna. Nonostante la grande passione per le ricerche puramente matematiche e l’impegno dedicato alle pubblicazioni in questo ambito, alcuni incontri con coloro che all’epoca si occupavano dell’insegnamento della matematica in Italia (tra gli altri, Emma Castelnuovo, Mario Ferrari, Liliana Chini Artusi, Rosa Rinaldi Carini, Mario Barra, Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Fulvia Furinghetti) e fuori dall’Italia (Georges e Fréderique Papy in Belgio, Zoltan Paul Dienes in Ungheria) lasciano il segno e inducono il nostro protagonista a rivolgere la mente sempre più spesso alle problematiche dell’insegnamento e dell’apprendimento. Ma sono ancora gli anni della New Math, dell’insiemistica alla scuola primaria, della produzione di libri di testo come contributo considerato determinante in questo senso; è un’epoca in cui la didattica della matematica come disciplina non esiste ancora, ma in cui alcuni matematici, sensibili alle problematiche aventi strettamente a che fare con l’insegnamento, conducono riflessioni e avanzano proposte su questo tema.

Seguono poi gli anni in cui si intensifica l’attività di formazione per gli insegnanti, si conducono le prime prove sperimentali in aula, un periodo che per il nostro protagonista culmina con un convegno organizzato dall’UMI nel 1980 a Cognola di Trento, al quale egli è invitato, accanto ad altri studiosi militanti in questo settore, e al quale sono invitati anche i più famosi studiosi stranieri di problematiche didattiche relative all’insegnamento della matematica dell’epoca: Zoltan Dienes, Georges Papy, Fréderique Papy, Zofia Krygowska ed Efraim Fischbein.

L’incontro con Fischbein, che diventa il primo mentore di didattica della matematica per il nostro giovane protagonista, è fondamentale: si tratta di un incontro che segna una svolta epocale, fa intravedere la possibilità di una teoria scientifica nell’ambito dell’apprendimento della geometria, che inizia ad andare ben oltre la semplice euristica, come lascia intendere la teoria dei concetti figurali. A quell’epoca, per l’autore, il passaggio dalla matematica alla matematica per la scuola è quasi definitivo.

Gli anni ’80 sono poi segnati dall’incontro fondamentale, dirompente, fulminante, cruciale, decisivo con Guy Brousseau, amico e collega carissimo, e la sua teoria delle situazioni didattiche, che segna la nascita della didattica della matematica come disciplina scientifica. Seguono poi tre eventi che segneranno ulteriormente e profondamente tutta la vita scientifica e personale del nostro autore: la fondazione, nel 1984, del Nucleo di Ricerca Didattica (NRD) presso l’Università di Bologna, uno dei primi nuclei fondati in Italia, intorno al quale si costituì un gruppo di ricerca e divulgazione, di cui fecero (e fanno) parte molti insegnanti ricercatori; la fondazione, nel 1986, del

Convegno “nazionale” *Incontri con la Matematica*, del quale la prima edizione, la numero 0, si tenne a Bologna, mentre le successive, dalla numero 1 in poi a Castel San Pietro Terme, tuttora il più grande convegno “nazionale” in didattica della matematica, che ha visto la partecipazione dei maggiori esponenti della ricerca nel campo a livello internazionale; la fondazione, nel 1987, della rivista *La matematica e la sua didattica*, una rivista internazionale di ricerca tuttora attiva.

Il lavoro e l’amicizia con Francesco Speranza, gli incontri, durante il Convegno n. 6 a Castel San Pietro Terme, con Efraim Fischbein e Gerard Vergnaud in contemporanea, la profonda passione per la divulgazione e la storia della matematica, per l’arte figurativa, oltre che per la didattica della matematica, gli incontri con Raymond Duval e la sua teoria dei registri di rappresentazione semiotica, una “vera bomba culturale”, sono altre pietre miliari nella storia narrata dal protagonista di queste intense memorie.

Un libro di memorie ricco di dettagli curiosi e unici, di riflessioni profonde e argomentate, di citazioni preziose e stimolanti, di storie e di esperienze personali che si intrecciano nel tempo; un libro coinvolgente, scorrevole e avvincente nella narrazione che cattura e appassiona il lettore fino alle ultime pagine, più personali e intime.

Lo consigliamo vivamente a tutti coloro che desiderano conoscere più in profondità non solo la didattica della matematica e molti illustri personaggi, di altissimo spessore umano e culturale, che hanno contribuito a creare l’attuale didattica della matematica, ma anche il Nostro, le sue straordinarie qualità umane e professionali, il suo illuminante percorso di formazione accademica e personale, la sua appassionata dedizione alla ricerca, alla divulgazione della matematica, alla formazione di allievi e insegnanti, la sua ricchissima produzione scientifica, i suoi grandi interessi in ogni campo della cultura, le sue peripezie esplorative e avventure intellettuali, dalle quali emerge con forza anche il modo in cui il Nostro vede la didattica della matematica: una “matematica applicata, applicata all’apprendimento”, dunque una disciplina matematica.

Un libro molto atteso, non solo dai suoi più affezionati (ex) allievi di dottorato che si sono lasciati trasportare nel corso degli anni dalle sue affascinanti storie di vita, di esperienze e di ricerca vissute in prima persona con illustri personaggi che per molti, non solo (ex) allievi, sono prestigiose, qualificate, autorevoli, ricorrenti citazioni, riconosciute a livello internazionale.

Impossibile non leggere tutto d’un fiato questo prezioso libro e attingere alla sua ricchissima bibliografia generale per ulteriori approfondimenti, studi e ricerche.

Iori, M. (2021). La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Raymond Duval

La formazione degli insegnanti è il problema principale nell'insegnamento della matematica. E questo problema è particolarmente cruciale per gli studenti fino a 16 anni ma anche oltre. A questo proposito, dobbiamo prendere in considerazione tre punti di vista fondamentali. Prima di tutto, quello dei requisiti matematici, ovviamente. Ma anche quello dei giovanissimi studenti ancora in pieno sviluppo intellettuale, che devono anzitutto acquisire personalmente la propria autonomia intellettuale! Infine, quella degli insegnanti nelle loro classi. Gli insegnanti devono essere in grado di passare dal punto di vista matematico al punto di vista degli studenti, per guidarli e adattarsi ai diversi ritmi di progresso e alle diverse esigenze. La complessità di questo problema deriva dal fatto che le "teorie", sia dal punto di vista dei processi di apprendimento e di comprensione dei giovani studenti, sia dal punto di vista della gestione del lavoro in aula da parte degli insegnanti, si moltiplicano e si rinforzano tra loro. Tutto questo, per non parlare dei gruppi di esperti che definiscono gli obiettivi di acquisizione a livello di cicli e le progressioni nei contenuti in relazione alla successione degli anni scolastici.

Indipendentemente da qualsiasi insegnamento, c'è il fatto che la matematica ha uno status "epistemologico" specifico, rispetto alle altre discipline scientifiche. Ora, l'uso relativamente recente del termine "epistemologia" si è rapidamente dimostrato ambiguo, poiché designa allo stesso tempo un'epistemologia intra-matematica e un'epistemologia comparativa. La prima è interamente incentrata sull'emergenza dei concetti matematici e strettamente legata alla storia della matematica. La seconda, fondata da Kant, mette a confronto i diversi modi di accedere agli oggetti di conoscenza in matematica e nelle altre discipline scientifiche. È ovviamente questa che è essenziale per un'educazione di base comune che dovrebbe essere indirizzata a tutti gli studenti. Ed è interessante notare che è l'epistemologia comparativa che si è imposta in molte ricerche sull'insegnamento in primaria e secondaria, con il ricorso ai lavori di Peirce e la crescente importanza data alla semiotica.

Tra tutte le "teorie" semiotiche, l'analisi semio-cognitiva delle attività matematiche si concentra specificamente sulle operazioni specifiche di ciascuno dei diversi registri semiotici che vengono mobilitati per "fare (un po' di) matematica" e sulla *loro necessaria coordinazione cognitiva*. Perché è solo quando inizia questa coordinazione cognitiva che possiamo capire la matematica e accedere agli "oggetti matematici". Ma gli oggetti matematici non hanno nulla in comune con i fenomeni fisici, e ancor meno con le situazioni "concrete" della vita quotidiana. E, contrariamente a quanto spesso si lascia credere, le rappresentazioni iconiche che vengono proposte nei documenti didattici non consentono di visualizzarle. L'obiettivo dell'analisi semio-cognitiva delle attività matematiche è la *assunzione di consapevolezza* da parte degli studenti del funzionamento semio-cognitivo specifico della matematica. Ma questo richiede che *gli insegnanti stessi ne diventino consapevoli*. Altrimenti, si scontreranno contro il muro che ferma i loro studenti, e rimarranno bloccati e scoraggiati ai piedi del muro dell'incomprensione dei loro studenti.

La ricerca presentata in questa tesi è interamente dedicata alla "consapevolezza" che gli insegnanti hanno, o non hanno, del funzionamento semio-cognitivo specifico della matematica. Essa si basa su uno spettro molto ampio di rappresentazioni semiotiche di contenuti matematici di base (2.4 e 2.5, pp. 76–88). Perché è a queste rappresentazioni che i giovani studenti si trovano di fronte nell'apprendimento della matematica. Ma, soprattutto, queste rappresentazioni sono poste in relazione a uno dei quattro registri nei quali esse sono prodotte, al fine di evidenziare il modo di "fare" matematica: convertire le rappresentazioni semiotiche da un registro a un altro, il che implica un coordinamento cognitivo tra i due registri mobilitati (2.6, pp. 88–95). Per condurre questa ricerca è stato elaborato un questionario in funzione delle operazioni semio-cognitive da eseguire e alle coordinazioni cognitive pre-requisite (necessarie). Esso dunque non comporta alcuna questione che richieda l'uso esplicito di conoscenze matematiche già insegnate. Si attiene al solo punto di vista del funzionamento cognitivo implicitamente richiesto per qualsiasi attività matematica ("*la dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*"), (3.8.3, pp. 140–165). E, ultima scelta logica ma rischiosa, tutti gli elementi del questionario sono formulati utilizzando i termini della "teoria" semio-cognitiva dei registri di rappresentazione semiotica! Naturalmente, tutti gli insegnanti che hanno accettato di partecipare a questa ricerca operavano nella scuola primaria, nella scuola secondaria di I grado o nei primi anni di scuola secondaria di II grado.

La ricerca presentata in questa tesi, che è stata sostenuta nel 2015, è un'impresa ambiziosa per l'ampiezza del campo che vuole esaminare. E, data la complessità del problema della formazione degli insegnanti per l'educazione matematica, l'obiettivo evidenziato in questa ricerca non poteva essere raggiunto così direttamente. E questo per due motivi. Il primo deriva dal fatto che il funzionamento semio-cognitivo alla base di qualsiasi attività matematica evidenzia una presa di coscienza e che volerla comunicare o appropriarsene come qualsiasi altro tipo di conoscenza risulta inefficace. Questa presa di coscienza richiede compiti specifici che la preparino e può essere raggiunta solo nel tempo, sulla scala di un anno scolastico e in interazione con il lavoro individuale degli studenti su questi compiti specifici. È anche d'altra parte interessante notare che l'analisi dei risultati va in questa direzione (4.3.1, 4.3.2 e 4.3.5, pp. 176–200 e pp. 208–219). La seconda ragione deriva dal fatto che i trattamenti, cioè le sostituzioni di rappresentazioni semiotiche da effettuare nello stesso registro, sono tanto fondamentali quanto le conversioni. Perché di fronte a un problema o a un’attività matematica, sono i trattamenti da *effettuare matematicamente* che determinano la scelta delle conversioni, vale a dire i cambiamenti di registro da effettuare. E qui, la consapevolezza delle possibilità di trattamento che un registro offre, e che gli altri registri non permettono di fare, è essenziale quanto quella delle conversioni.

Le difficoltà e, soprattutto, le resistenze suscitate dalla necessità di una presa di coscienza del funzionamento cognitivo richiesto per la comprensione in matematica, derivano dal fatto che *qualsiasi attività matematica ha sempre due volti*. Il volto esposto è quello degli “oggetti”, delle proprietà, dei teoremi, delle operazioni, degli algoritmi che si impostano istituzionalmente come obiettivi di “acquisizione” per ciascuno dei cicli di insegnamento. Tale volto *utilizza necessariamente delle rappresentazioni semiotiche*. Il volto nascosto è, al contrario, quello della coordinazione cognitiva dei quattro tipi di registri di rappresentazione semiotica. È questo coordinamento che consente di comprendere ed eseguire le conversioni e i trattamenti necessari per essere in grado di risolvere *matematicamente* i problemi. Tuttavia, i processi cognitivi non sono affatto gli stessi su ciascuno di questi volti. I processi cognitivi del volto nascosto sono processi di riconoscimento che vengono eseguiti in meno di un secondo, indipendentemente dai contesti o dalle situazioni. Così, per esempio, la conversione non si dà tra una rappresentazione che viene data all’inizio e un’altra rappresentazione nel registro di arrivo, ma tra qualsiasi rappresentazione che si sceglie all’inizio e una moltitudine di altre possibili rappresentazioni in un altro registro. E questo in entrambe le direzioni di una conversione, IL RICONOSCIMENTO *deve essere fatto in meno di trenta secondi al massimo*! Questo è il primo criterio dell’autonomia intellettuale di uno studente per “acquisire” CONOSCENZE matematiche e utilizzarle spontaneamente, anche al di fuori della matematica.

La classificazione delle rappresentazioni semiotiche in diversi tipi di registri e la distinzione delle operazioni semio-cognitive di conversione e di trattamento non è una “teoria”, ma uno strumento di analisi, una metodologia e un programma di ricerca. Pertanto, diverse aree devono ancora essere esplorate. In primo luogo, ci sono aspetti che hanno a che fare con la consapevolezza del funzionamento semio-cognitivo delle scritture simboliche e la gamma delle operazioni discorsive nella designazione degli oggetti. E dunque la loro presa di coscienza da parte degli studenti e degli insegnanti è cognitivamente e didatticamente decisiva per l’introduzione dell’algebra elementare. Nel questionario elaborato per gli insegnanti, la grande maggioranza delle domande riguarda la visualizzazione geometrica o grafica e le domande concernenti le scritture simboliche sono limitate alla scrittura frazionaria (3.8.3, pp. 140–165). Tuttavia, il contributo della ricerca presentata è duplice. Essa evidenzia i limiti di ogni questionario per rendere gli insegnanti consapevoli dei processi cognitivi del volto nascosto delle attività matematiche, o anche solo per valutarlo. Ma mostra anche la necessità di una formazione degli insegnanti specificamente focalizzata su tali processi cognitivi. Indipendentemente dal questionario e dai suoi risultati, questa tesi offre un dossier molto ben documentato sulle "teorie" che privilegiano alcuni tipi di rappresentazioni nell'amplissimo spettro delle possibili rappresentazioni semiotiche (2.1 e 2.2, pp. 25–65). E ne offre una presentazione sistematica e rigorosa, che risulta essere preziosa da consultare.

La consapevolezza del funzionamento semio-cognitivo specifico del pensiero e delle attività matematiche sta diventando più urgente che mai. Ciò è dovuto alle sfide che tutti i sistemi educativi devono affrontare. Ci sono le crescenti differenze tra tutti gli studenti, sia in relazione al loro ambiente sia ai loro precedenti percorsi scolastici. Esse richiedono sia un adattamento alla "eterogeneità" degli studenti sia un aumento delle tipologie dei supporti personalizzati. C'è poi da considerare la messa in discussione della coppia (insegnante, classe) come principio stesso di un'organizzazione comune e uniforme del lavoro per un gruppo annuale di 20-30 studenti. E c'è, infine, la crescente sproporzione tra ciò che può essere appreso a scuola e ciò che dovrà essere appreso nella vita professionale. Si tratta di una sfida sia dal punto di vista istituzionale che dal punto di vista di docenti e studenti. Senza una tale consapevolezza, gli insegnanti si troveranno molto rapidamente in contrasto con le richieste degli studenti.

E le ricerche didattiche come entrano in tutto questo? Ricerche che non mescolino i punti di vista fondamentali da prendere in considerazione nella formazione degli insegnanti *dovrebbero essere intraprese per ciascuna delle teorie* riguardanti i processi di apprendimento e di comprensione della matematica da parte dei giovani studenti, e più in particolare per le teorie che si riferiscono alle "rappresentazioni" e alla "semiotica". Perché non c'è e non può esserci un'educazione matematica che non sviluppi l'autonomia intellettuale di ogni studente.

Asenova, M. (2021*). Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Prefazione di Ferdinando Arzarello

> *Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle – ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain.*
> *(A. Grothendieck, La topologie ou l'arpentage des brumes)*

Ogni insegnante di matematica ha davanti a sé il problema di come fare apprendere efficacemente ai propri allievi le conoscenze matematiche previste nel loro piano di studi: da un lato, possiede le conoscenze e i metodi matematici che deve insegnare (per esempio l'Aritmetica) nelle versioni per così dire dotte, che si trovano nei sacri testi della disciplina (la scuola didattica francese parla di 'sapere sapiente'), dall'altro ha presenti teorie e strumenti didattici opportuni (per esempio le teorie costruttiviste dell'apprendimento, i vecchi regoli di G. Cuisenaire o il recente TouchCounts di N. Sinclair) per la trasposizione didattica di tali conoscenze e metodi (il 'sapere da insegnare'). In questo senso, ogni insegnante ha davanti a sé due tipi di 'oggetti': quelli matematici e quelli specifici della didattica della matematica. I due devono certamente parlarsi, ma come questo si possa realizzare non è certo impresa facile: di fatto si tratta di un problema ancora aperto, cui le varie scuole di ricerca in didattica della matematica hanno dato soluzioni diverse e spesso parziali. Questo accade in realtà anche per gli oggetti matematici del sapere sapiente, ma dal versante del sapere insegnato il problema è molto più serio. Infatti, da un lato la questione ontologica degli oggetti della matematica (il *che cosa*?) è risolta in vari modi da chi si occupa di fondamenti della disciplina nell'ambito di precise istanze epistemologiche (il *come*?); dall'altro chi lavora alla definizione ontologica degli oggetti propri della didattica della matematica è particolarmente attento ad aspetti di natura etica, come il valore sociale, culturale e politico della formazione matematica (il *perché*?), mentre gli aspetti epistemologici non sono sempre così presenti. La dimensione più strettamente matematica rischia perciò di essere trascurata o assente, il che può rappresentare un ostacolo serio per definire gli oggetti della didattica della matematica in modo ontologicamente soddisfacente. Questo problema è bene messo in luce da M.A., che scrive:

> Il legame dei suoi [della didattica della matematica, N.d.A.] oggetti di studio con quelli corrispondenti della matematica non ha finora ricevuto la dovuta attenzione nelle ricerche e dunque nemmeno è stata mai affrontata la problematica di una definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 9)

L'autrice invece ritiene che è proprio dall'attività matematica che si possono derivare un'ontologia e una epistemologia per la didattica della matematica, e non viceversa. È questa dimensione, anche pragmatica, che deve condurre a una definizione di 'Oggetto Matematico Specifico della Didattica della Matematica' (OMSDM). Ed è precisamente di questa definizione concreta, che ha un carattere ontologico, epistemologico e pragmatico, e della sua giustificazione che tratta la sua tesi.

Per questo M.A. elabora in primo luogo dei criteri cui deve soddisfare una tale definizione e, visto che non trova alcun costrutto tra quelli correnti in filosofia della matematica che siano in grado di soddisfarli, ricorre alla filosofia sintetica della matematica contemporanea di Fernando Zalamea, matematico e studioso dei fondamenti dell'Università di Bogotà, che a sua volta si ispira alle riflessioni fondazionali del grande matematico Alexander Grothendieck (1928–2014), che lui definisce 'maestro universale della matematica' e il cui pensiero troviamo anche nel lavoro di M.A. Nelle sue opere F.Z. propone una svolta verso una comprensione sintetica (come antonimo di analitica) della matematica più recente, che si basa ampiamente sulla teoria matematica delle categorie (di qui il suo debito a Grothendieck, uno dei padri di questa teoria). È questa interpretazione categoriale che gli permette di evidenziare importanti tensioni dialettiche e dinamiche nell'attività matematica, che tendono ad essere oscurate, e talvolta del tutto cancellate, dalla consueta comprensione analitica e formale, tipica della filosofia della matematica più tradizionale, da cui traggono ispirazione quasi tutti gli studi sui fondamenti della matematica da G. Frege (1848–1925) in poi. Egli prospetta così una visione dell'evoluzione del pensiero matematico attraverso un processo di crescita a spirale, che rompe le consuete prospettive riduttive e lineari in cui la comprensione matematica viene intesa in modo iterativo.

È proprio questa visione dialettica e dinamica della matematica prospettata da F.Z. che spinge M.A. a tracciare nella sua tesi un cammino nuovo verso una definizione di OMSDM in grado di soddisfare ad alcuni criteri, individuati come necessari; questi (p. 307) richiedono che la definizione:

(1) sia compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;
(2) tenga conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;
(3) tenga conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;
(4) sia sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie in didattica della matematica;
(5) sia in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.

È questo un compito davvero arduo, che non spaventa certo la nostra studiosa, che non esita ad affrontare il problema in modo aperto e innovativo rispetto alle soluzioni più tradizionali, nessuna delle quali permette, per un motivo o per l'altro, di soddisfare pienamente a tutti questi criteri. Con pazienza e sagacia degne di Ulisse, intraprende un viaggio attraverso le principali definizioni di oggetto matematico avanzate dal 1991 ad oggi dai più prestigiosi ricercatori in didattica della matematica, da Y. Chevallard ad A. Sfard (cap. 8), e le confronta tra di loro rispetto ai criteri individuati. Il viaggio tocca sette mete e il resoconto dei dati raccolti è riassunto nella Tabella 6 (p. 242) e nel diagramma della Figura 29 (p. 245), entrambi ampiamente commentati. Essi mostrano che nessuna delle definizioni esaminate soddisfa tutti i criteri utili ai fini di una definizione appropriata di OMSDM. M.A. scopre inoltre una caratteristica che contraddistingue tutte le definizioni esaminate, cioè il fatto che esse sono formulate come definizioni generali di oggetto matematico *tout court*, valide indipendentemente dal fatto che si prenda in considerazione la matematica o la didattica della matematica come riferimento. Di per contro, tutte le definizioni considerate presentano alcune caratteristiche comuni condivise: la natura epistemica, la dinamicità e una posizione pragmatica nei confronti del loro significato; inoltre gli aspetti semiotici sono presenti in sei definizioni su sette.

A questo punto, vista la risposta non specifica rispetto alla natura degli OMSDM che ha trovato nelle definizioni correnti in didattica della matematica, la nostra ricercatrice decide di verificare se e in quale misura le caratteristiche degli oggetti matematici che si evincono dalle definizioni date in didattica della matematica trovano una qualche corrispondenza nelle definizioni di oggetto matematico che si incontrano nella matematica come disciplina. Perciò intraprende un secondo viaggio tra le molte proposte date in merito dalle diverse scuole fondazionali della matematica a partire da quelle nate a cavallo tra Ottocento e Novecento giù giù fino ai nostri giorni. Il viaggio è oggetto del Cap. 9 e tocca 12 mete di vario tipo: esso si conclude con l'osservazione che gli oggetti matematici descritti in filosofia della matematica presentano caratteristiche molto diverse tra loro e solo alcuni di essi possono essere considerati compatibili con le definizioni di oggetto matematico incontrate nel primo viaggio. Di fatto le definizioni di oggetto matematico fornite in didattica della matematica fanno riferimento a una tipologia di oggetto matematico che non esiste come tale in filosofia della matematica, ma che ha molti tratti in comune con un ipotetico oggetto di studio della *filosofia della pratica matematica*.

Il sugo dei due viaggi porta la nostra viaggiatrice indefessa ad approdare infine alla seguente domanda: a quale tipo di filosofia della pratica matematica fare riferimento ai fini di ottenere

> una risposta adeguata alle esigenze ontologiche comuni a tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica, di tenere conto della dinamicità

> degli oggetti matematici, del carattere pragmatico del loro significato, della loro dimensione epistemica, senza trascurare quella semiotica? (p. 305)

In un certo senso, Ulisse si trasforma in Kant, che si chiede nei suoi Prolegomeni come sia possibile una scienza pura della natura; analogamente qui si tratta di definire una scienza 'pura' che riguardi gli OMSDM. Scrive infatti M.A.:

> [Rispondere a questa domanda] consentirebbe di inquadrare gli oggetti matematici dal punto di vista della filosofia della matematica in maniera tale che la loro definizione si accordi con le esigenze di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 305)

Definiti così i criteri in modo per lei soddisfacente (p. 308), M. A. può finalmente dedicarsi alla ricerca di una definizione precisa di OMSDM. Dapprima intraprende la costruzione di un quadro teorico che sia coerente con tali criteri (seconda parte della tesi: capp. 10 e 11); segue la definizione di OMSDM (terza parte, cap. 12), coerente conseguenza del quadro teorico precedentemente preparato.

La seconda parte costituisce il cuore della ricerca mentre nella terza parte se ne raccolgono i frutti. Il punto di partenza è l'individuazione di una specifica filosofia della pratica matematica vera e propria, da interpretare nell'ambito della didattica della matematica attraverso una integrazione con elementi propri di quest'ultima, di carattere gnoseologico, semiotico ed ermeneutico, relativi agli oggetti propri della didattica della matematica. Essa è anche la sua parte più complessa e irta di difficoltà di lettura, soprattutto per chi non abbia una qualche conoscenza della teoria delle categorie. Infatti il modo nuovo di guardare agli oggetti matematici della teoria delle categorie è proprio la 'svolta ontologica' che permette la definizione di un quadro teorico che soddisfi ai criteri individuati nella prima parte e la conseguente definizione di OMSDM. Qui F. Zalamea, con la sua filosofia sintetica, e A. Grothendieck, con la sua nozione di fascio e poi di topos, unificante e chiarificatrice in matematica[1] vengono in aiuto a M.A., che osserva:

> Zalamea fa risalire questo cambio di prospettiva ontologica al lavoro di Grothendieck, che in matematica ha avuto un effetto simile a quello che ebbe la nascita della teoria della relatività in fisica; infatti, è a Grothendieck che Zalamea attribuisce la 'svolta einsteiniana' […] in matematica. Tale svolta consiste nel mettere al centro dell'attenzione il movimento, il transito degli oggetti, come nella teoria della relatività viene messo al centro il movimento degli osservatori;

[1] Grothendieck (Recoltes et Semailles, Manoscritto inedito, p. 52; reperibile online: https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf) usa la metafora dell'arpentage des brumes (mappare le nebbie) per indicare il ruolo dei fasci nell'unificare le diverse geometrie, così come nello sposare i numeri con le grandezze (épousailles du nombre et de la grandeur).

> ciò che in tale ‘matematica relativa’ […] diventa centrale, è l’individuazione di invarianti appropriati che ‘si celano’ dietro ai transiti. (p. 332)

È questa l’idea chiave che ispira tutto il lavoro della tesi: una definizione categoriale degli OMSDM ne cattura coerentemente tutti gli aspetti richiesti dai criteri definiti nella prima parte, tra i quali quello della dinamicità ha un ruolo fondamentale.

L’autrice è ben consapevole delle difficoltà che questi argomenti presentano, soprattutto in quanto richiedono di guardare agli oggetti matematici in modo nuovo e rivoluzionario rispetto alla tradizionale concezione insiemistica cui si è abituati. M.A. si trasforma allora in una guida insuperabile e, novello Virgilio (quante vesti indossa nel suo lavoro!), accompagna il lettore con un testo in cui le inevitabili difficoltà sono spezzettate e presentate con il continuo ricorso a interpretazioni intuitive, ma non per questo meno rigorose, e all’uso di utilissimi diagrammi, che sfruttano opportunamente in questo senso il linguaggio delle categorie come scienza dei diagrammi per chiarire i vari concetti introdotti. In questo il lavoro riprende importanti idee di C.S. Peirce sul ragionamento diagrammatico, di cui negli ultimi anni si è riappropriata la didattica della matematica. Questo aspetto ci consente di introdurre degli elementi di ragionamento diagrammatico all’interno della didattica della matematica come disciplina, il che può avere dei vantaggi teorici importanti, a causa della “osservabilità” diagrammatica delle relazioni coinvolte.

Nell’economia della tesi, il linguaggio categoriale, in quanto diagrammatico, è un metalinguaggio, che descrive e spiega il diagramma, ma tale descrizione/spiegazione non può sostituire il diagramma. Questo aspetto è spiegato nella tesi con una bella analogia, in cui M.A. ricorre al celebre problema dei ponti di Königsberg e alla soluzione che ne diede L. Euler (p. 400 e ss.). Le figure in quelle pagine illustrano sia la città come rappresentata in una mappa del 1652 (Fig. 39) sia il grafo astratto elaborato da Euler nel 1736 (probabilmente a partire da una qualche mappa analoga) per risolvere il problema. Esso segna la nascita dell’odierna teoria dei grafi, della quale Euler enunciò le prime definizioni e teoremi. Ora,

> il teorema dimostrato da Euler non parla di ponti, aree della città e di numero di ponti che si affacciano su esse, ma di oggetti astratti (nodi, archi e gradi di nodi) e per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto; [si può dire, da un lato, che modellizza il problema in forma generale ed astratta, e dall’altro] per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto. (p. 449)

Ebbene, gli

> strumenti categoriali [sono usati nella tesi] nello stesso modo in cui oggi si usano gli strumenti appartenenti alla teoria dei grafi per modellizzare dei fenomeni

> complessi reali, con l'obiettivo di rendere evidenti le relazioni generali tra gli elementi coinvolti. (p. 403)

e inoltre la trattazione che se ne fa "necessita di un'interpretazione nel linguaggio della didattica della matematica con la sua terminologia e le sue relazioni specifiche" (p. 404). La teoria delle categorie risulta perciò, per usare il linguaggio di Grothendieck, una mappatura astratta adatta a descrivere gli OMSDM. Il capitolo 11 accompagna il lettore passo passo nella costruzione di questa mappatura: essa

> consiste nella messa in corrispondenza di elementi del linguaggio astratto categoriale, che sono via via introdotti, con elementi del linguaggio della didattica della matematica come disciplina. In questo modo le relazioni che valgono in teoria delle categorie potranno ottenere un'interpretazione (o modellizzazione) nell'ambito della didattica della matematica. (p. 400)

Ad ogni passo (ce ne sono ben 11 nel capitolo) l'introduzione dei concetti categoriali è seguita dalla sua interpretazione/modellizzazione, con esempi presi dal contesto della didattica della matematica. Ad esempio, si mostra come "le trasformazioni naturali [tra categorie] possano essere viste come modalità più generali di classificazione delle strategie di *networking* proposte in Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008),[2] sulla base della tipologia di "traduzione" a cui ricorrono" (p. 413).

Questo metodo permette di affrontare anche un importante problema gnoseologico riguardante il significato degli oggetti matematici. L'idea di fondo è l'interpretazione di un importante teorema, il cosiddetto Lemma di Yoneda, in base al quale il concetto categoriale di funtore rappresentabile consente di esprimere il fatto che la conoscenza pragmatica dell'oggetto, espressa attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. Questo significa che

> un oggetto (matematico) può essere interpretato attraverso (o sostituito da) le sue relazioni con il contesto, dove il contesto è costituito dalle relazioni con gli oggetti di una categoria a cui l'oggetto appartiene. Cioè la conoscenza pragmatica dell'oggetto, che si esprime attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. (p. 415)

Questa proprietà avvicina l'interpretazione categoriale qui affermata sul significato degli oggetti matematici a quelle date, in forma e tempi diversi, da Pierce e Wittgenstein: si afferma infatti un'interpretazione del significato in termini di:

> uso in contesto (reale o potenziale). L'uso di un oggetto (o gli effetti pratici che esso può produrre) sono pensabili solo attraverso le sue relazioni con altri oggetti

---

[2] Prediger, S, Bikner Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM: the international Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165–178. doi 10.1007/s1185-008-0086-z

> ed è proprio questo aspetto che può essere interpretato in termini di *funtore rappresantabile*. (p. 415)

Tutto il capitolo 11 è sostanzialmente un itinerario verso la dimostrazione di questa proposizione, che può anche essere espressa in questa forma: “attraverso l’immersione di Yoneda è (...) possibile dimostrare [sotto opportune assunzioni] che tramite l’attribuzione di significato pragmatica all’oggetto, cioè attraverso la sua conoscenza in contesto, è possibile accedere a tutti i significati dell’oggetto e quindi conoscerlo completamente” (p. 419).

A questo punto gran parte del lavoro è fatto: non resta che definire l’OMSDM, nonché l’oggetto matematico a esso collegato tramite un linguaggio diagrammatico. Questo è fatto nel capitolo 12, in cui si esemplificano due casi specifici di categorie (la categoria in cui l’insieme di base è ridotto a un singoletto e una categoria in cui l’insieme di base è ordinato) e si illustrano le conseguenze di tali ipotesi sulle relazioni tra la dimensione formale degli oggetti matematici e la loro dimensione pragmatica nell’ambito della pratica matematica. Nel primo caso si ha una frattura totale fra gli aspetti analitici e quelli sintetici, nel secondo caso l’ordinamento permette di introdurre una dimensione dinamica nel modello (si possono ottenere infatti i modelli di Kripke, descritti successivamente nel cap. 13) ed esso è concretamente interpretabile con un costrutto semiotico usato in didattica della matematica, il *semiotic bundle* ([3]), in cui quelli che sono i suoi insiemi semiotici diventano prefasci nell’interpretazione categoriale.

La tesi si conclude con un approfondimento tecnico (cap. 13), in cui si espone, sempre con il linguaggio piano e il più possibile intuitivo cui M.A. ci ha abituati, una sintesi dello strumento principale della filosofia sintetica di F. Zalamea, raccontato dall’autore in un volume non ancora pubblicato al momento della stesura della tesi ([4]) e qui indicato con l’acronimo SKTR (dalle iniziali inglesi di: Prefascio (Sheave), Kripke, Topos, Riemann): esso corrisponde all’acronimo HKTR nel testo spagnolo di Zalamea (prefascio si dice Hace in quella lingua). Si tratta dell’approfondimento del modello di ‘arpentage des brumes’ proposto da Grothendieck così come è interpretato da Zalamea e cui M.A ha ampiamente attinto, come lei stessa esplicita.

In questo modo l’autrice è stata in grado di rispondere opportunamente alle tre domande di ricerca, poste all’inizio della trattazione, e che, in quanto pienamente soddisfatte, e opportunamente espresse in forma assertoria riassumono il contenuto del suo lavoro:

1. *Criteri cui deve soddisfare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.*

[3] Arzarello, F. (2006). Semiosi as a multimodal process. In L. Radford & B. D’Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 267–299.

[4] Nel frattempo esso è stato pubblicato: Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

2. *Elementi teorici per costruire un quadro teorico di riferimento che soddisfi i criteri del punto 1.*
3. *Definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel contesto teorico individuato (2) e che tenga conto dei criteri individuati (1).*

Conclude il lavoro una ricca bibliografia, che dimostra l'ampiezza della ricerca di Miglena Asenova, con cui mi complimento per l'ottimo lavoro fatto.

Invito pertanto caldamente coloro che si interessano ai problemi dell'insegnamento della matematica, e quanti amano i problemi fondazionali della matematica stessa, a leggere questo lavoro. La fatica che faranno li premierà certo con l'apertura di nuovi orizzonti di riflessione e di pensiero: è quanto è successo a me e auguro a tutti loro.

IN RICORDO DI …

In ricordo di Ennio Peres

Ennio Peres è stato un insegnante di matematica appassionato, amatissimo dai suoi studenti, un enigmista di fama internazionale esperto di giochi (soprattutto a carattere matematico ed enigmistico), un essere umano splendido con caratteristiche uniche. Durante un'intervista con la giornalista Sandra Onofri, di *Noi donne*, venne coniata per lui la definizione *giocologo*, che poi lo ha contraddistinto.

È nato a Milano nel 1945, ma ha vissuto soprattutto a Roma. Laureato in matematica, professore di matematica e informatica nelle scuole secondarie, è diventato celeberrimo nel mondo della ricerca ludica, una vera leggenda nella creazione di giochi fin dalla rubrica "*lettere e cifre*" (quotidiano *La Stampa*). La sua fama crescente l'ha portato fin da giovane a collaborare con quotidiani e riviste, fra i quali ricordo solo *Paese Sera* e *l'Unità*; su *Linus* ha curato, dal 1995 e per oltre 20 anni, la rubrica di giochi *Scherzi da Peres*. Da qualche anno pubblicava sulla rivista scientifica *Sapere*.

Come enigmista, è stato apprezzatissimo autore di rebus e di parole crociate, impareggiabile creatore di anagrammi. Ha proposto annualmente, tramite Internet, una sfida denominata *Il cruciverba più difficile del mondo*. Per la forma ambigua e fuorviante delle sue definizioni, i suoi doppi sensi e l'uso di sigle e abbreviazioni, è assimilabile alla tradizione anglosassone del *cryptic crossword*.

Ennio si è anche interessato all'utilità del computer come strumento per creare anagrammi, ma in modo critico, evidenziando i limiti che si riscontrano nella ricerca artificiale di frasi di senso compiuto. Nel 2002 ha infatti battuto, in una singolare sfida in più riprese, il *Motore Anagrammatico del Gaunt*. Una sfida che assomigliò molto a quelle fra la leggenda degli scacchi Garri Kimovič Kasparov e i vari cervelli artificiali che gli sono stati contrapposti negli anni, ma terminata ahinoi con la sconfitta umana.

Ennio si è spento a Roma all'età di 76 anni, il 17 luglio 2022, nella sua casa, dopo una durissima lotta a più riprese con il cancro.

Sposato con Susanna, aveva un figlio di nome Marco. Una terna davvero molto solida e ricca di affetto.

Nella sua storia personale va ricordata una vicenda legata ad Aldo Moro. Un giornalista ravvisò, in alcune sue lettere dalla prigionia, delle frasi che sembravano scritte in codice. Essendo lo statista un appassionato di enigmistica, la cosa apparve verosimile; dunque, il giornalista convocò Ennio in qualità di esperto, chiedendogli conferma di ciò e l'eventuale interpretazione. Nel febbraio del 2001, Ennio fu anche convocato come testimone presso la Corte di Assise di Milano. Tutti i dettagli della storia sono narrati nella biografia in wikipedia.

Ennio ha collezionato un enorme numero di premi per la sua attività creativa dal 1983 al 2021, molti dei quali di enorme prestigio. E ha pubblicato molti articoli e libri, fra i quali amo ricordare:

- *Giochi matematici*, Roma: Editori Riuniti, 1986
- *Così è se vi pare* (scritto con Susanna Serafini), Napoli: Malvarosa, 1986
- *Parole, numeri, logica e fantasia* (scritto con Susanna Serafini), Milano: Edizioni l’Ed, 1990
- *Matematica. Corso di sopravvivenza* (scritto con Riccardo Bersani), Milano: Ponte alle Grazie, 1998
- *L’Anagramma*, Roma: L’Airone, 2005
- *620 giochi per esercitare la mente* (scritto con Riccardo Bersani e Susanna Serafini), Milano: Baldini Castoldi Dalai, 2005
- *Juegos de palabras y con las palabras*, Barcelona: Octaedro Editorial, 2005
- *L’elmo della mente. Manuale di magia matematica* (scritto con Susanna Serafini), Milano: Salani, 2006

e soprattutto, per il coraggio e la comicità ironica:

- *Come diventare ricchi con i giochi d’azzardo - Metodo matematico garantito* (scritto con lo pseudonimo di Mister Aster), Roma: Avverbi, 2005.

Quest’ultimo volume non può mancare in nessuna libreria personale.

Mi fermo qui, ma fra il 2005 e il 2020 ha pubblicato almeno altri 20 libri, alcuni dei quali dedicati anche alla probabilità, alla divulgazione della matematica, alla fisica e alla musica.

Dopo un lungo periodo di sofferenza, dunque, Ennio Peres, ci ha lasciato. La sua tempra ci ha fatto sperare ogni volta che potesse riprendersi, ma non è stato così. Dopo varie disavventure e difficoltà, Ennio è venuto a mancare in casa, vicino ai suoi cari.

Come ho scritto, ha a lungo professato il mestiere di insegnante di matematica, svolto con amore. È stato di certo il più grande giocologo italiano di tutti i tempi e uno dei più grandi del mondo degli ultimi anni.

Voglio ricordarlo particolarmente e personalmente per le sue numerose conferenze di grande successo nel convegno di Castel San Pietro a partire dal numero 0, che si svolse a Bologna nel settembre del 1986, e in moltissimi altri successivi, spesso con conferenze, ma talvolta in sola presenza.

In quel settembre 1986 tenne una conferenza plenaria dal titolo *Il gioco dell’informatica* nell’ambito del convegno *Gioco e matematica*, a Bologna:

Peres, E. (1986). Il gioco dell’informatica. In B. D’Amore (Ed.), *Gioco e matematica*. Atti del Convegno nazionale *Gioco e matematica*, Bologna 8-10 settembre 1986 (pp. 70–77). Bologna: Cappelli.

Si trattava, come ho già ricordato poco sopra, del convegno *Incontri con la matematica* n. 0, che si svolse poi ogni anno dal 1987 a oggi (2022: convegno XXXVI), non più a Bologna ma a Castel San Pietro Terme. Ennio partecipò più volte a questo convegno sempre con conferenze plenarie ammiratissime ed entusiasmanti.

Ha scritto due prefazioni a miei libri sui giochi matematici e la nostra collaborazione è stata intensa e piena di affetto, non solo professionale, ma anche familiare. La sua capacità creativa era unica. Ci siamo frequentati con una certa assiduità, in diverse occasioni e in varie circostanze, e poi sempre meno, personalmente. L'ultima è stata a Roma, il 22 marzo 2009, nell'Auditorium Parco della musica, in occasione della mia conferenza di chiusura (in tutti i sensi), del *III Festival della Matematica di Roma*, diretto da Piergiorgio Odifreddi.

Ennio era davvero una persona unica, geniale, gentile e sempre disponibile. Tutti lo ricordano per le sue maniere corrette, sempre sensibile, di garbo affascinante. Simpatico nel senso pieno del termine.

I suoi "cruciverba più difficili" del mondo, i suoi fantastici anagrammi, la sua capacità di saper usare la matematica per creare giochi, sono davvero unici, irripetibili.

Il mondo ha perso una grande persona.

Bruno D'Amore

In ricordo di Giovanni Valentini

Avevo finalmente scritto un testo, un brevissimo saggio critico sull'opera di Giovanni Valentini, pittore che ha a cuore, nella sua produzione, la scienza in genere e la cibernetica in particolare. La richiesta era partita da lui, un giorno a Milano, dopo una mia conferenza a Brera. E poi questi due anni maledetti ci hanno fatto rimandare rimandare rimandare, fino a quando è stato troppo tardi … Ho dunque deciso di far conoscere l'opera di questo speciale artista almeno ai lettori di questa rivista.

Come può un matematico-critico d'arte, che da quarant'anni tenta disperatamente di spiegare al mondo che matematica (in generale scienza) e arte si muovono all'unisono, che non sono agli antipodi, che sono umanesimi a tutto campo, non restare affascinato, conquistato dall'opera di Giovanni Valentini? Quando vedo citati allo stesso tempo Lucio Fontana, Roberto Sanesi, Bruno Munari e Silvio Ceccato, personaggi con alcuni dei quali ho avuto relazioni di amicizia e di studio io stesso, come posso nascondere la mia eccitazione? Nella storia di questo straordinario artista si mescolano relazioni con gli storici e i critici d'arte; Giulio Carlo Argan e Pierre Restany, da una parte, e gli scienziati naturali Marco Fraccaro e Raffele Ciferri, dall'altra. E poi Valentini vanta alle origini mostre personali nelle mie stesse gallerie di esordio, la mitica Apollinaire di Guido Le Noci di Milano e la grande Obelisco di Roma. In quest'ultima, nel 1974, realizzai con il maestro-amico-mentore Filiberto Menna una mega mostra internazionale dal titolo significativo *De Mathematica* il cui catalogo è ancora oggi in vendita, esempio citatissimo delle relazioni di cui dico sopra. Ricordo ancora quando, nel 1969, Elio Marchegiani presentava nella Galleria Allegra Ravizza a Lugano i suoi fulmini, creati con un generatore di Van Der Graaf, sconvolgendo il pubblico, ignaro di fisica e di scienza in generale, e perciò stupito.

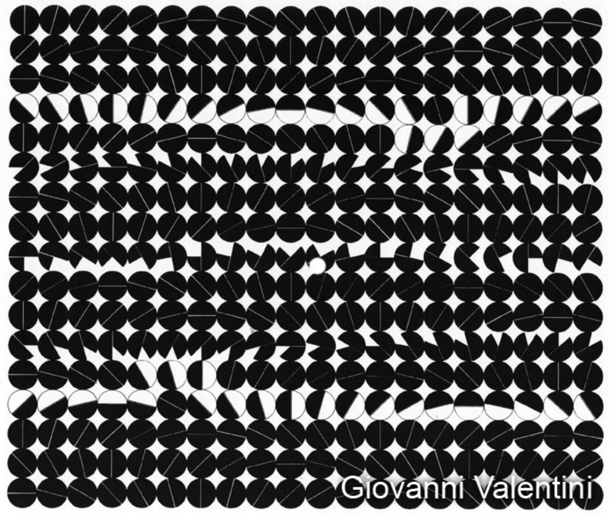
Scienza, arte, tecnologia convivono da sempre e spiegano l'arte di questo eccezionale creatore, Giovanni Valentini. I suoi studi multiformi e variopinti s'intrecciano fra le accademie d'arte, l'informatica, la cibernetica (vedi la citazione di Silvio Ceccato, con il quale partecipai negli anni '70 a un dibattito a Milano), l'astronomia, la telematica e la biologia, riapparsa di recente con vigore nelle sue ultime opere. Nelle sue creazioni, indiscutibilmente realizzate nel dominio dell'arte figurativa, si intrecciano tutti questi interessi, cellule, esperimenti, cristalli, spaccati di visioni astronomiche. Se è vero che nelle sue opere l'allusione alla vita animale ritrova forza espressiva e coraggio simbolico, è anche vero che nei primi anni '70 già realizzava mostre con animali ibernati sotto azoto liquido ed esponeva radar in azione. Antesignano di molte avanguardie, predecessore di tante correnti, Giovanni Valentini ha al suo attivo un percorso storico invidiabile che va preso a modello e come riferimento da tutti quanti noi ci interessiamo di arte, soprattutto se vogliamo restare in quel vasto ambito di relazioni fra arte e altri generi espressivi, considerati più scientifici.

Ho poi l'impressione che molte delle sue allusioni visive a questi mondi altri (per esempio dell'energia e dell'astronomia) siano richiami a due possibili relazioni: metaforiche e semiotiche.

Per esempio, la sua famosa opera *Astrale Cybord con nebulosa 3005* esposta nel 2008, non è solo, non può essere solo un'immagine dell'universo ricca e significativa dal punto di vista visivo e scientifico, è chiaramente una metafora della poesia; il mistero di questa forma creativa è richiamato dalla magia onirica suscitata dalla sua visione. Ma è anche una trasformazione di segni, un gioco di rinvii significanti. Lo dice in modo perfetto il critico d'arte Claudio Cerritelli: "I cieli dipinti da Valentini (…) sono (…) metafore della conoscenza che sfida lo stato d'inerzia della rappresentazione".

I canneti, gli universi paralleli, le foglie, i fossili, i cuoi, le spugne, le visioni astronomiche, gli alberi, le canne, gli universi, le nebulose, i radar, i peli, la materia oscura, la pura energia, … non sono che richiami violenti, di una forza impressionante che ti lascia senza fiato, alla Natura, a quella parte scientifica della Natura che molti rifuggono per ignoranza o per scarsa attenzione, ma che affascina poi anche i più reticenti alle scienze, catapultandoli in quel meraviglioso duplice mondo che unisce arte e scienza.

I cristalli di neve sono sottili creazioni matematiche che possono incantare non solo il geniale Thomas Mann (*La montagna incantata*, ricordate?), ma anche ciascuno di noi; e Giovanni Valentini lo sa, nello scegliere, per esempio, questa immagine. Sa che qui confluiranno vibrazioni del cervello, dell'anima, poesia e razionalità del suo visitatore, tanto che lui potrà guidarlo, con quell'abilità che lo distingue, a vedere quel che lui, artista, ha deciso di mostrare.



Bruno D'Amore

In ricordo di Walter Valentini

Tra i grandi personaggi che ho conosciuto nella mia lunga militanza nel mondo della critica d'arte, un posto di rilievo è occupato da Walter Valentini.

Non ero ancora membro dell'AICA (Association International des Critiques d'Art), con sede allora presso il Louvre, e mi sembrava impossibile riuscire a superare tutte le prove necessarie per arrivare un giorno a farne parte (il che avvenne nel 1977), ma già organizzavo mostre e, soprattutto, scrivevo presentazioni per artisti esordienti, ma anche di grande fama che mi chiedevano testi per le loro personali, dato che il mio modo singolare di interpretare il lavoro nell'arte sotto un'angolazione matematica li sorprendeva, li avvinceva e li convinceva. Non solo, la mia modalità critica era anche ben accolta fra i critici d'arte dell'epoca, dalle gallerie pubbliche e anche dalle private.

Fra gli artisti che si rivolgevamo a me, in particolare voglio ricordare Elio Marchegiani che molto mi spingeva a percorrere senza esitare questa strada così personale. Insieme partecipammo anche a due biennali veneziane. Durante una sua mostra personale con mio testo sul catalogo, Elio mi presentò un artista già di grande fama, Walter Valentini, dicendoci che, secondo lui, noi eravamo "fatti l'uno per l'altro". Mi precipitai pochi giorni dopo nello studio di Walter per conoscere il suo lavoro, che ignoravo del tutto, e fu un reciproco colpo di fulmine.

Vantavo a quel tempo la grande amicizia con Filiberto Menna, che ritengo essere il più grande e profondo critico d'arte che l'Italia abbia mai avuto; lui mi stava preparando per l'ingresso all'AICA, suggerendomi studi opportuni e temi da sviluppare per iscritto. Era l'inizio del 1974; Filiberto e io stavamo sistemando gli ultimi dettagli della mostra internazionale *De Mathematica* che poi si tenne presso la galleria dell'Obelisco, in via Sistina, a Roma. Avevamo invitato artisti italiani e stranieri di superba fama internazionale, fra i quali Escher; ma anche giovani non ancora conosciuti che però si muovevano in quell'ambito che Menna chiamava "linea analitica" all'interno della quale si situava la mia "arte esatta" (Menna, 1975; D'Amore, 1977).

Tentai di tutto per inserire nella mostra, oramai pronta, il lavoro di Walter, ma fu concretamente impossibile, troppo tardi. La cosa dispiacque molto a me, ma anche a Filiberto, dato che conosceva e stimava Walter, ma non ci aveva pensato… Per tutta la vita ho sofferto nel pensare che l'opera di Walter non fosse presente a Roma in quella occasione di respiro internazionale; né presente in catalogo, ovviamente, dato che in catalogo si può far cenno solo agli artisti espositori… Tale libro-catalogo ebbe un successo incredibile, se si pensa che, dal 1974, è ancora in vendita.

Da allora non ho più lasciato Water; l'ho presentato in varie occasioni, l'ho coinvolto in mostre collettive, ho scritto su di lui tanti saggi, perfino un libro tutto dedicato a lui (D'Amore, 1979).

Le sue tele di allora proponevano uno sfondo scuro, di grafite e carbone, mentre le linee che svettano su questo fondale (archi e segmenti) hanno colori sfavillanti che si distaccano (a me piacevano soprattutto gli azzurri).

Walter lavora su legno, su una carta bellissima, densa, spessa, assai elaborata, o direttamente sulle pareti, il che significa che, alla fine di una mostra, alcune sue opere devono per forza essere distrutte. Io mi disperavo per questo, e lui rideva.

La sua origine intellettuale, quella alla quale si riferisce culturalmente, sono gli scritti originali di architettura, di prospettiva e sulla proporzione geometrica, dunque umanistica e rinascimentale allo stesso tempo. Leon Battista Alberti, Andrea Mantegna, Piero della Francesca, Paolo Uccello, Leonardo … sono i suoi eroi, la cui opera conosce a memoria, in modo stupendo. Chi ha studiato queste opere con rigore, riconosce nei suoi quadri tutto ciò; chi non l'ha fatto, resta comunque stordito dalla bellezza pulita, razionale, assolutamente matematica, di questi lavori.

I suoi sfondi di base (legno, tela, carta, parete) non sono solo supporti per opere grafiche, sono decisivi per la realizzazione e l'interpretazione dell'opera stessa, ne fanno parte. La carta, per esempio, stropicciata e non liscia, non stirata, dà una dimensione di antico e di elaborato ancor prima di essere, di diventare, base di opere affascinanti che attirano l'attenzione e scatenano l'ammirazione estetica di chiunque.

E poi ci sono le installazioni, spesso in ambienti dedicati al sacro, con una geometria finissima creativa che cattura il visitatore, che trasforma l'ambiente in una complessa struttura geometrica e allo stesso tempo poetica, che avvince. Un sogno geometrico. Geometria, tempo, storia si rincorrono nel suo progetto di proporli tutti all'unisono, come solo un vero artista rinascimentale sa fare.

Non ha solo lavorato in Italia, Walter, anche all'estero, per esempio negli USA più volte, soprattutto creando queste installazioni; ma anche le altre sue opere hanno avuto successo critico e commerciale. Forse la più famosa e visitata installazione è *Labirinto*, del 1992, realizzata alla Fiera dell'Arte di Milano: si tratta di un percorso di 250 metri che comprende muri, stanze, soffitti, pannelli, ricchi di ogni tipo di materiale, ma soprattutto vernice bianca, fili a piombo oscillanti, pendoli di materiali diversi (il tempo), … La geometria domina sovrana, ma interpretata in modo poetico, creativo, come solo lui sa fare.

E non è finita; ci sono anche sculture in bronzo e terracotta; una di esse, di proprietà del Comune, ha un posto fisso a Milano, in piazza sant'Ambrogio. Un'altra si può vedere a Urbino, nel santuario del sacro Cuore di Gesù, in località Ca' Staccolo.

Spesso la sua opera richiama gli aspetti razionali delle prime civiltà umane; in alcune sue opere ho voluto scorgere scritte ataviche come quelle sumere, il che lo ha convinto e appassionato, tanto che in successivi lavori ha fatto esplicitamente sua tale idea, rielaborando in forma personale questi miei suggerimenti interpretativi.

Nelle biografie su Walter, per esempio in wikipedia, molti biografi riportano alcune mie frasi che sono diventate emblematiche per spiegare certe su opere che devono e possono essere interpretate come fossero "quasi reperti archeologici appena abbozzati e tracciati per uno scopo esoterico, mistico, divinatorio, ma sempre razionali spesso matematici". I segni che Valentini traccia sulla carta, sulle tavole, sui muri sono eseguiti "con tecniche arcane tipiche del muratore, dell'imbianchino, tecniche forse usate da millenni". Ma a scrivere di Valentini sono stati anche tanti critici assai più che illustri… I più importanti e significativi critici dagli anni dal '70 in poi.

C'è anche, in Walter, una ricerca di logicità nella narrazione che avviene nel linguaggio delle sue opere, ricerca che pare dominante nell'arte contemporanea razionale. La narrazione (si sapeva ormai, fin dagli anni '70, quando scrivevo le prime volte su di lui) è un'operazione solo apparentemente libera, in quanto esistono codici sempre più evidenziati secondo i quali la narrazione si svolge (gli usuali classici esempi sono gli scritti di Benjamin Whorf e quelle di Wladimir Propp per ciò che riguarda le prime analisi del settore; ma oggi vi sono citazioni ben più aggiornate e complete che potrebbero essere fatte). Ora, Walter è o no consapevole di questi "codici"? Li segue, li forza o semplicemente li rispetta? C'è un'evidente ricerca sul piano della sua logica narrativa; e la si scopre soprattutto nei dittici, nei trittici e nelle raccolte di disegni: il disegno si evolve, dirò poi come, da enti elementari a strutture complesse, basate secondo me in maniera evidente su questi enti.

L'idea che Walter raccolga "reperti" (che sono poi suoi disegni eseguiti come progetti o veri e propri lavori), non è solo mia, ma anche di altri critici d'arte che si sono occupati del suo lavoro. Scrive per esempio Alberto Veca: "Un lavoro di recupero di schizzi, di disegni o di prove si mescola all'intenzione di rendere logica, conseguente la lettura". Si noti che, effettivamente, "logica" qui è sinonimo solo di "conseguente", nulla di più (né altro potrebbe essere, dato il tipo di linguaggio adottato sul piano puramente espressivo aniconico).

Anzi, qui più che mai appare evidente il fatto che certe allusioni tematiche ai problemi di "logicità interna" sembrano essere fuori luogo. La "logica" di cui tanto si parlava dagli anni '80 in poi nell'ambito dell'interpretazione critica dell'operazione artistica, altro non è se non codice intrinseco, evoluzione storica dei processi linguistici e descrittivi. Dunque, a mio avviso, non è "logica" la parola più adatta, anche perché corrosa da significazioni tutt'affatto diverse, ma piuttosto "coerenza" intesa come "legame evolutivo". La consequenzialità della lettura, suggerita da Veca, però, non dovrebbe essere esclusivamente una sorta di coerenza iconica o visiva, troppo povera; potrebbe (e lo fa, nell'opera di Walter) assurgere al ruolo di regola per la decodificazione del messaggio.

La ricerca di Walter, dunque, si avvale di pochi elementi strutturanti:

elementi geometrici minimali e archi di circonferenza; qualche volta i segmenti appaiono paralleli, altre volte delimitano una forma: triangoli, quadrati, rombi, rettangoli, trapezi; solo a volte gli archi si dispongono a formare semicirconferenze, solo rarissime volte circonferenze complete. Tra i segmenti, alcuni acquistano la forza (facilmente riscontrabile dal tratto più marcato) di segni denotanti e delimitanti (quelli che formano il *disegno*); altri sono solo segmenti di riporto, tracce del lavoro progettuale occorso per realizzare la struttura soggiacente. Solo a volte, spazi pieni, quasi totali, spesso appena accennati o soffusi, stanno a indicare, individuandola, una zona emergente; si tratta allora di triangoli che potrebbero alludere a piramidi; di cerchi che potrebbero essere soli o pianeti in opposizione; di parallelogrammi che sono spazi di semplice rinvio metaforico; di rettangoli che sono spazi di analisi. Infine, a volte Walter ricorre a oggetti "diversi", per esempio forme di cartone nerissime, attraverso le quali compie indagini funzionali anche al di fuori della tela: il superamento della bidimensionalità dell'oggetto prodotto e, credo, un'aspirazione continua a far sì che ogni sua opera venga considerata anche come progetto per possibili opere a tre dimensioni. Le strutture ottenute, anche se non analizzabili sul piano strutturale che le scienze formali sarebbero comunque in grado di fornire, si presentano però come realizzazioni in sé compiute, anche se mutuamente allusive, tramite rinvii segnici o addirittura programmatici spesso appena appena accennati.

Tali segni di rinvio sono assai spesso presenti, a ben guardare; anzi, proprio la ricorrenza di essi è fatto emergente nell'opera di Walter. Non solo i soffusi colori, i chiaroscuri, i materiali, le forme; ma anche l'atteggiamento che sempre e comunque l'artista assume di fronte all'opera, la smaterializzazione che raggiunge l'ambiente così saturato, la facilità dell'immediata percezione emotiva, la sensazione di potersi appropriare con spontaneità del discorso. A nulla servono ulteriori precisazioni, approcci sempre più sottili e di conseguenza laboriosi e faticosi: i termini del linguaggio appaiono già disponibili, riconoscibili, naturali, quasi oggetti di una lingua (e non concetti o soggetti di essa). A mio avviso, in tutto ciò traspare lo studio ossessivo e assai colto degli artisti del Rinascimento con l'Umanesimo che domina, come fosse un nuovo Umanesimo, un nuovo Rinascimento.

Dal giugno 1999 al luglio 2004 sono stato assessore alla cultura nel Comune di Castel San Pietro Terme (BO). Nel pieno centro di quella stupenda città medievale sorgeva già un'ampia ed elegante struttura espositiva che però non aveva mai avuto un lancio a livello nazionale, piuttosto solo locale. Nacque allora la Galleria d'arte contemporanea. Negli anni 2001, 2002, 2003 e 2004 feci in modo che si svolgessero 12 mostre personali, 4 ogni anno, tenute da famosi artisti che si muovono nel filone da me studiato, arte concettuale, ma nel settore più specifico dell'arte esatta, cioè nel quale la presenza razionale, non sempre del tutto consapevole nell'artista, della matematica, è fondamentale. Per ogni artista feci realizzare non solo gli usuali cataloghi, ma anche deliziosi ed elegantissimi volumetti pubblicati dall'editore Pitagora e ora raccolti in un cofanetto che racconta questa avventura.

Ebbene, Walter appare nel secondo anno e stringo ora in mano, mentre scrivo queste parole e mentre lamento la sua morte, il volumetto che lo riguarda.

Questi due ultimi maledetti anni hanno strappato a molti di noi persone care cui restiamo legati. Ma le opere di Walter, alcune delle quali Martha e io abbiamo la fortuna di avere tutti i giorni sott'occhio, esposte sui muri dell'appartamento in cui viviamo, mi fanno ancora vedere quello sguardo vivo, acuto, penetrante, ironico, squisitamente intelligente e allo stesso tempo pieno di passione, di Walter, il caro amico la cui opera vorrei fosse conosciuta dal mondo intero.

Bruno D'Amore

In ricordo di Carlos Eduardo Vasco Uribe

In Italia pochi conoscono questa figura che, invece, in America Latina, e soprattutto in Colombia, è leggendaria. Per cui dirò qualche parola sulla sua formazione e poi sul ricordo personale che ho di lui.

La sua famiglia era di altissimo livello culturale, con un padre pediatra sperimentale che aveva frequentato personalmente Jean Piaget in Svizzera. Carlos venne iscritto in un istituto gesuita, nel quale studiò soprattutto varie discipline umanistiche: latino, greco, letteratura classica (soprattutto spagnola ma anche italiana), storia e arte. Ma, durante i mesi di vacanza, studiava per conto proprio, con accanimento, per puro gusto personale, matematica e pedagogia, tanto che ottenne un titolo di "professore di matematica", insegnando poi proprio questa materia in una scuola di Barranquilla nel 1962. Come sua passione personale, possiamo elencare inoltre la filosofia della scienza, tanto che, quando si laureò nel 1962 in Filosofia e Lettere, presso la Pontificia Universidad Javeriana di Bogotá (università gesuita), la sua tesi di laurea era relativa all'epistemologia dello spazio e del tempo, con forti relazioni con la relatività ristretta. Tale tesi fu realizzata sotto la direzione del matematico italiano Carlo Federici (1906 – 2004), con la vita del quale quella del giovane Carlos si intrecciò a lungo. [Questo matematico, Federici, assai poco conosciuto in Italia, era stato assistente all'Università di Genova, ma era emigrato presto in Colombia, dove dapprincipio proseguì i suoi studi e le sue ricerche in matematica, dedicandosi però presto ai problemi di insegnamento della matematica; si tratta di una figura stimatissima in America Latina e soprattutto in Colombia].

A quel punto, Carlos iniziò i suoi studi di postlaurea nell'Università di San Louis, nel Missouri, USA, ottenendo nel 1967 il titolo di Master in Fisica e nel 1968 quello di PhD in Matematica.

La poliedrica formazione di Carlos, dunque, fu assai personale, basata su studi epistemologici, scientifici (matematica e fisica) e di profondi umanesimi, soprattutto latino, greco e letteratura.

Nel 1971, dunque all'età di 34 anni, venne ordinato sacerdote in Germania, nella quale stava studiando teologia a Francoforte, subendo la forte influenza filosofica dell'epoca, per esempio di Max Horkheimer, Theodor Adorno e Jürgen Habermas. Tornato in patria, in Colombia, Carlos divenne parroco in un quartiere assai povero di Bogotá e si dedicò a dettare molti corsi e seminari in varie università proprio su questi filosofi tedeschi, introducendone i nomi e i contenuti nel continente. Iniziò la sua produzione scientifica, che sarà enorme, proprio con testi di riflessione sul pensiero di questi notevoli filosofi. E intraprese la sua carriera accademica: quando Federici andò in pensione, la prestigiosa Universidad Nacional lo rimpiazzò accademicamente con Carlos; il quale non cessò però di lavorare anche in molte altre università, non solo colombiane.

Nel campo della matematica pubblicò vari lavori scientifici fino a scoprire, come è capitato a parecchi di noi, il problema della riflessione sull'apprendimento della matematica che lo condusse a considerazioni sempre più significative su quella che oggi si chiama didattica della matematica. E così, anche grazie alla costante e affettuosa guida di Carlo Federici, che sempre considerò suo maestro, Carlos si lanciò nello studio di questo tema. Siccome Federici era responsabile per conto del Ministero colombiano dell'Educazione, anche Carlos si dedicò a temi relativi all'insegnamento della matematica agli studenti, anche di giovanissima età, fino alla scuola primaria, collaborando con il ministero, con alcune università e con l'Istituto Colombiano di Pedagogia di Bogotá. Già negli anni '60 iniziò una vasta revisione dei programmi curricolari nazionali, dapprima insieme a Federici e poi per conto proprio. Carlos si dedicò a questo tema per decenni, tanto che molti docenti oggi lo ricordano principalmente per questa attività istituzionale.

In questo ambito di interessi collaborò con molti istituti stranieri, soprattutto tedeschi e statunitensi, elaborando a questo proposito due teorie pedagogiche assai personali: TGS (teoria generale dei sistemi) e TGP (teoria generale dei processi), che ha approfondito e proposto per tutta la vita come suoi cavalli di battaglia. Tali teorie decretarono il suo successo personale in contesto internazionale, tanto che l'Università di Harvard lo invitò a dare corsi su questi temi negli anni '85 e '86, nominandolo: *Distinguished Schumann Fellow*.

Le relazioni di Carlos con gli USA furono sempre molto intense; nel 1989 fu nominato *Lecturer in Education* della fondazione *John Simon Guggenheim* e *Ricercatore* nell'ambito del famoso *Progetto Zero*, della Scuola di postlaurea in Educazione di Harvard, in qualità di *Visiting Scholar*.

Nel 1993 venne nominato dal ministero Primo coordinatore della *Missione di scienza, educazione e sviluppo*, tuttora ben nota in Colombia con la denominazione *Commissione dei Saggi*. Ma, fra lo stesso 1993 e il 1994, il lavoro ministeriale di Carlos terminò; una nuova legge nazionale relativa all'educazione si limitava a fornire idee guida, una sorta di "Indicazioni nazionali", lasciando ogni istituto scolastico libero di formulare suoi programmi specifici, purché fossero mantenuti all'interno delle linee indicate in queste idee guida.

Nel 1995 andò in pensione (anzitempo) nell'università Nacional, divenendone Professore emerito e ricevendo il titolo di PhD Honoris Causa; si dimise dalla Compagnia di Gesù, per dedicarsi a una vita familiare di coppia. Da quel momento viaggiò intensamente per vari anni all'estero, soprattutto negli USA, ritornando in Colombia definitivamente nel 2001, chiamato ancora una volta dal ministero a elaborare gli *Standard basici di competenza* che furono promulgati proprio nel 2001.

La sua posizione didattica era notevolmente mutata, allontanandolo da un formalismo di base che può essere considerato eccessivo e che contraddistingueva le sue precedenti proposte didattiche che possono essere considerate ispirate al bourbakismo e alla cosiddetta Matematica moderna, cui aveva aderito. Un esempio del suo nuovo modo di considerare la matematica e la sua didattica è provato da queste sue parole:

> Dovevamo anche sviluppare molto di più le matematiche dal punto di vista del linguaggio quotidiano, soprattutto se vogliamo che esse diventino competenze di ogni cittadino per la vita reale, addirittura per intrepretare la stampa, la televisione, la presa di decisioni, e per questo fui molto entusiasta difensore dei lineamenti curricolari ministeriali.

Ricominciò pertanto la sua collaborazione con i vari ministeri che si succedettero negli anni.

Carlos fu insignito, nell'agosto 2008, del *Premio Nazionale di Educazione Francisca Radke* da parte dell'Università Pedagogica Nazionale; quello stesso anno, nel mese di dicembre, ricevette dal Presidente della Repubblica e dal Ministero di Educazione il *Premio Simón Bolívar* nella categoria *Orden de Gran Maestro*.

Successivamente l'Universidad Autonoma di Manizales gli riconobbe il titolo di *Honoris Causa* "por amor a la ciencia".

Negli ultimi anni lavorò come professore a contratto presso varie università, ma solo nell'ambito dei dottorati di ricerca; in particolare presso la Universidad Distrital Francisco José de Caldas di Bogotá nell'ambito della quale ho il piacere di svolgere il mio lavoro da circa un decennio, non solo per far arrivare al risultato finale di PhD vari studiosi, ma anche dividendo con Carlos, nelle stesse ore, seminari a due voci sulla matematica, sulla sua epistemologia e sulla sua didattica.

Notevoli e ben ricordate dai nostri comuni ex studenti le nostre ampie e serrate discussioni di carattere epistemologico, dato che lui si dichiarava intuizionista alla Brouwer, rifiutando molte delle mie dimostrazioni basate sulla logica classica; le nostre discussioni divertivano molto i presenti. Per sua stessa ammissione, al contrario, le mie analisi della didattica della matematica (per esempio la mia suddivisione cronologica della ricerca in termini di Didattica A, B e C) lo hanno trasformato, tanto che ebbi modo di presenziare, su suo invito, a due sue conferenze nelle quali descrisse ai presenti proprio il mio modo di vedere.

Lo invitai a dare una conferenza a Castel san Pietro Terme, nell'ambito del convegno *Incontri con la matematica* nel novembre 2007; partecipò e propose una conferenza sul tema: *La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica* che appare ora in quegli Atti. (In quella occasione gli feci conoscere Gérard Vergnaud). E poi partecipò, personalmente, a proprie spese, al convegno internazionale in mio onore: *Mathematics and its didactics: forty year of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna nel 2011; anche in questo caso tenne una conferenza sul tema: *Useless Algebra vs Useful Algebra in schools and everyday life: spreadsheets shall overcome* che ora appare in quegli Atti. (Rivide Vergnaud e conobbe moltissimi illustri didatti di tutto il mondo, il che fu di suo ampio gradimento).

Ci legava un'enorme reciproca stima, un'immensa amicizia non solo personale ma anche familiare; scrisse più volte prefazioni a libri di Martha Fandiño.

Voglio qui anche ricordare la sua generosità: si dedicò, sia da parroco, sia successivamente, a opere benefiche e di assistenza sociale, soprattutto nei più poveri quartieri di Bogotá e di Colombia; il che fa di lui davvero una persona eccezionale completa, non solo sul piano culturale, che merita di essere ricordata con stima.

Bruno D'Amore

La tensión entre opuestos como generadora de conocimiento matemático: El caso discreto-continuo en el cálculo

Tension between opposite perspectives as a generator of mathematical knowledge: The discrete-continuous case in calculus

Tensione tra prospettive opposte come generatore di conoscenza matematica: Il caso discreto-continuo nel calcolo

Carlos Rondero Guerrero, Aarón Reyes Rodríguez y Vicenç Font Moll pp. 7–26

Tra matematica e filosofia: La *Rithmomachia* di Francesco Barozzi

Between mathematics and philosophy: Francesco Barozzi's *Rithmomachia*

Entre la matemática y la filosofía: la *Rithmomachia* de Francesco Barozzi

Irene Papadaki e Athanasios Gagatsis pp. 27–31

Introdurre la nozione di funzione con l'algebra dei segmenti di Cartesio

Introducing the notion of function through Descartes' algebra of segments

Introducir la noción de función a través del álgebra de segmentos de Descartes

Nicol Imperi ed Enrico Rogora pp. 33–52

Riflessioni su certi dannosi modi di stravolgere l'apprendimento della matematica

Reflections on certain harmful ways of distorting the learning of mathematics

Reflexiones sobre ciertas formas nocivas de distorsionar el aprendizaje de la matemática

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla pp. 53–64

RECENSIONI E PREFAZIONI pp. 65–91

IN RICORDO DI … pp. 93–108

La matematica e la sua didattica, Anno 30, n. 1-2, 2022

ISSN 1120-9968